



UNIUNEA EUROPEANĂ



GUVERNUL ROMÂNIEI

Fondul Social European
POSDRU 2007-2013Instrumente Structurale
2007-2013MINISTERUL
EDUCAȚIEI
NAȚIONALE
OIPOSDRUInspectoratul Școlar
Județean Suceava

FONDUL SOCIAL EUROPEAN

Investește în
OAMENI

Proiect cofinanțat din Fondul Social European prin Programul Operațional Sectorial Dezvoltarea Resurselor Umane 2007-2013

Axa prioritară 1 „Educația și formarea profesională în sprijinul creșterii economice și dezvoltării societății bazate pe cunoaștere”

Domeniul major de intervenție 1.1 „Acces la educație și formare profesională inițială de calitate”

Titlul proiectului: „TEEN PERFORM - Program inovator de îmbunătățire a rezultatelor școlare în învățământul liceal”

Contract număr: POSDRU/153/1.1/S/136612

Beneficiar: Inspectoratul Școlar Județean Suceava

Disciplina MATEMATICĂ

FIȘĂ DE LUCRU

Tema/Unitatea: Elemente de trigonometrie și aplicații geometrie

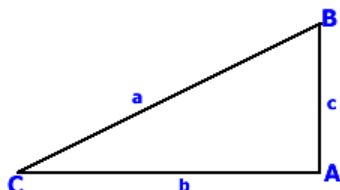
Prof. Monoranu Doina

BREVIAR TEORETIC

Formule trigonometrice. Trigonometrie. Elemente generale

Definiții

Într-un triunghi dreptunghic, considerând măsura unui unghi ascuțit numim:



sinusul = cateta opusă / ipotenuză

cosinusul = cateta alăturată / ipotenuză

tangenta = cateta opusă / cateta alăturată

cotangenta = cateta alăturată / cateta opusă

Sinusul, cosinusul, tangenta și cotangenta se numesc **funcții trigonometrice** și se notează cu *sin*, *cos*, *tg*, și *ctg*.

<p>Fiind dat un triunghi ABC dreptunghic în A, sunt adevărate următoarele relații:</p> $\sin^2 B + \cos^2 B = 1$ <p><i>formula fundamentală a trigonometriei</i></p> $\operatorname{tg} B = \frac{\sin B}{\cos B} \quad \operatorname{ctg} B = \frac{\cos B}{\sin B}$ $\operatorname{ctg} B = \frac{1}{\operatorname{tg} B}$ $\sin(90^\circ - C) = \cos C$ $\cos(90^\circ - C) = \sin C \quad \operatorname{tg}(90^\circ - C) = \operatorname{ctg} C$	Cele mai cunoscute valori ale funcțiilor trigonometrice					
	<i>u</i>	0°	30°	45°	60°	90°
	$\sin u$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
	$\cos u$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
	$\operatorname{tg} u$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	∞
	$\operatorname{ctg} u$	∞	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0

INSPECTORATUL
SCOLAR JUDEȚEAN
DÂMBOVIȚAFederația Națională a
Asociațiilor de Părinți -
Învățământ Preuniversitar

NOU!!! Acum poti calcula usor *sinusul, cosinusul, tangenta* si *cotangenta*..

Pentru triunghiul alăturat avem
formulele:

$$1 + \operatorname{tg}^2 B = 1 + \frac{b^2}{c^2} = \frac{c^2 + b^2}{c^2} = \frac{a^2}{c^2} = \frac{1}{\cos^2 B}$$

$$1 + \operatorname{tg}^2 B = \frac{1}{\cos^2 B}$$

$$1 + \operatorname{ctg}^2 B = \frac{1}{\sin^2 B}$$

Relații metrice în triunghiul dreptunghic

În triunghiul dreptunghic ABC cu $m(A) = 90^\circ$ folosim notațiile cunoscute: $AB = c$, $AC = b$, $BC = a$;

r = raza cercului circumscris triunghiului; l_a = lungimea bisectoarei dusă din vârful A;

m_a = lungimea medianei din A; r_a = lungimea razei cercului exînscriș corespunzător laturii BC;

$$p = \frac{a+b+c}{2}$$

În acest triunghi, ABC, avem:

$$1) \quad a^2 = b^2 + c^2 \Leftrightarrow \sin^2 A = \sin^2 B + \sin^2 C \quad 8) \quad a \cos C - a \sin C = b - c$$

$$2) \quad m_a = R = \frac{a}{2} \quad 9) \quad 1 + \operatorname{ctg} \left(\frac{\pi}{4} - B \right) = \frac{2}{1 - \operatorname{ctg} C}$$

$$3) \quad a^2 + b^2 + c^2 = 8R^2 \quad 10) \quad 4S = a^2 \sin 2B$$

$$4) \quad \cos A + \cos B = \sin C \quad 11) \quad \operatorname{tg} B = \frac{\sin B + \cos C}{\cos B + \sin C}$$

$$5) \quad \cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C = 1 \quad 12) \quad \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r_a} \right) = \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$$

$$6) \quad \operatorname{tg} \frac{B+C}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{B-C}{2} = \frac{b-c}{b+c} \quad 13) \quad l_a = \frac{bc\sqrt{2}}{b+c}$$

$$7) \quad \operatorname{ctg} \frac{B}{2} = \frac{a+c}{2} \quad 14) \quad \operatorname{tg} \left(\frac{B}{2} \right) = \sqrt{(a-c)/(a+c)}$$



UNIUNEA EUROPEANĂ



GUVERNUL ROMÂNIEI

Fondul Social European
POSDRU 2007-2013Instrumente Structurale
2007-2013MINISTERUL
EDUCAȚIEI
NAȚIONALE
OIPOSDRUInspectoratul Școlar
Județean Suceava

15) $r_a = p - c$

18) $S = p(p-a) = (p-b)(p-c)$

16) $\frac{b+c}{a} = \frac{h_a}{l_a} \sqrt{2}$

19) $S = r_b \cdot r_c = \frac{bc}{2}$

17) $r_b \cdot r_c = r(r + r_b + r_c)$

20) $r_a - r = r_b + r_c = a$

Relații metrice în triunghiul oarecare

1) Teorema sinusurilor: $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$

2) Teorema cosinusurilor: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A$

3) Teorema tangentelor: $\frac{a-b}{a+b} = \frac{\operatorname{tg} \frac{A-B}{2}}{\operatorname{tg} \frac{A+B}{2}} = \frac{\operatorname{tg} \frac{A-B}{2}}{\operatorname{ctg} \frac{C}{2}} = \operatorname{tg} \frac{A-B}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{C}{2}$

4) Formula lui Heron: $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$

5) Teorema medianei: $4 \cdot m_a^2 = 2(b^2 + c^2) - a^2$

6) $S = \frac{a \cdot h_a}{2}$

8) $\cos \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}}$

9) $\operatorname{tg} \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}}$

7) $\sin \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{bc}}$

10) $S = \frac{bc \sin A}{2} = \frac{abc}{4R}$

11) Teorema proiecțiilor: $a = b \cdot \cos C + c \cdot \cos B$

Exemple de itemi de tip examen de bacalaureat

1. a) Determinați lungimile medianelor triunghiului ale cărui laturi au măsurile 6,8,10

b) Determinați laturile a și b ale triunghiului ABC știind că $m_a = \sqrt{74}, m_b = \sqrt{14}, c = 6$ c) Determinați coordonatele centrului de greutate ale triunghiului ABC, unde $A(-4,0), B(4,0), C(0,12)$ 2. Demonstrați egalitatea $\sin 20^\circ \cdot \sin 40^\circ \cdot \sin 60^\circ \cdot \sin 80^\circ = \frac{3}{16}$.3. Calculați $\sin \frac{\pi}{10}$.INSPECTORATUL
SCOLAR JUDEȚEAN
DÂMBOVIȚAFederația Națională a
Asociațiilor de Părinți -
Învățământ Preuniversitar



UNIUNEA EUROPEANĂ



GUVERNUL ROMÂNIEI

Fondul Social European
POSDRU 2007-2013Instrumente Structurale
2007-2013MINISTERUL
EDUCAȚIEI
NAȚIONALE
OIPOSDRUInspectoratul Școlar
Județean Suceava

4. Demonstrați egalitatea $\cos \frac{2\pi}{7} + \cos \frac{4\pi}{7} + \cos \frac{6\pi}{7} = -\frac{1}{2}$.
6. Dacă $1 + \operatorname{ctg} \left(\frac{\pi}{4} - x \right) = \frac{2}{1 - \operatorname{ctg} y}$, $x, y \in \left(0, \frac{\pi}{2} \right)$, atunci $x + y = \frac{\pi}{2}$.
7. În triunghiul ABC se cunosc $m(\hat{B}) = 45^\circ$, $m(\hat{C}) = 75^\circ$, $BC = 6\sqrt{2}$. Să se afle lungimea laturii $[AC]$.
8. În triunghiul ABC $AB = AC = b$, $BC = a$, $a^2 = b^2(2 - \sqrt{3})$. Să se afle $m(\hat{A})$.
9. În triunghiul ABC se dau : $AB=2a$, $AC=3a$, $a>0$ și $m(A)=60^\circ$
- a) să se rezolve triunghiul ABC .
- b) să se afle lungimile razelor cercurilor înscris și circumscris triunghiului ABC
10. În triunghiul ABC se cunosc : $a=10$, $b=5$, $c=\sqrt{50}$
- a) Să se determine cosinusurile unghiurilor triunghiului.
- b) Să se calculeze $\cos(B+C)$
- c) Să se calculeze $\sin(2A+B)$
11. Determinați aria unui triunghi ABC în care $AB=3$, $CA=5$ și $\cos(A)=\frac{3}{5}$.
12. a) Știind că $x \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi \right)$ și $\operatorname{tg} x = -\frac{5}{2}$, să se determine valorile pentru $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{ctg} x$.
- b) Să se aducă expresia la o formă mai simplă, pentru x din domeniul de definiție:
- $$E = \frac{\sin^2 x}{1 - \cos x} - \frac{\cos^2 x}{1 + \sin x}$$
13. Să se determine raza cercului circumscris și raza cercului înscris triunghiului ABC cu laturile 6, 8, și 10.
14. În triunghiul ABC se cunosc $m(\hat{B}) = 45^\circ$, $m(\hat{C}) = 75^\circ$, $BC = 6\sqrt{2}$. Să se afle lungimea laturii $[AC]$.
15. Rezolvați triunghiul oarecare cu: $a=12$ cm, $B=\frac{\pi}{4}$, $C=\frac{5\pi}{12}$.

INSPECTORATUL
SCOLAR JUDEȚEAN
DÂMBOVIȚAFederația Națională a
Asociațiilor de Părinți -
Învățământ Preuniversitar