Proiect cofinanţat din Fondul Social European prin Programul Operaţional Sectorial Dezvoltarea Resurselor Umane 2007-2013
Axa prioritară 1 „Educaţia şi formarea profesională în sprijinul creşterii economice şi dezvoltării societăţii bazate pe cunoaştere"
Domeniul major de intervenţie 1.1 „Acces la educaţie şi formare profesională iniţială de calitate"
Titlul proiectului: „TEEN PERFORM - Program inovator de îmbunătăţire a rezultatelor şcolare în învăţământul liceal"
Contract număr: POSDRU/153/1.1/S/136612
Beneficiar: Inspectoratul Şcolar Judeţean Suceava

Disciplina MATEMATICĂ
FIŞĂ DE LUCRU

Tema/Unitatea: Probleme de numarare si combinatorica Matematici aplicate. Probabilitati

Expert educaţie: prof. Monoranu Mihaela Doina, Colegiul Tehnic „Mihai Băcescu" Fălticeni

Breviar teoretic

Elemente de combinatorică.

Mulțime: $M=\{a_1;a_2;\ldots.a_n\}$. ***Mulțime ordonată:*** $M=(a_1;a_2;\ldots.a_n)$ - mulțime împreună cu o ordine bine determinată de dispunere a elementelor sale.

$n! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n,\ n\in\mathbb{N}$	$1! = 1$	$0! = 1$	$n! = (n-1)!\cdot n,\ n\in\mathbb{N}^*$

Fie M o mulțime cu n elemente.

Aranjamente de n elemente luate cîte k- orice submulțime ordonată a mulțimii M, avînd fiecare cîte k elemente, $0\le k\le n$.

$\boxed{A_n^k = \dfrac{n!}{(n-k)!}}$, $0\le k\le n$ - numărul aranjamentelor de **n** elemente luate cîte **k.**

Permutări de n elemente –aranjamente de n elemente luate cîte n (orice mulțime ordonată de n elemente ale mulțimii M).

$\boxed{P_n = n!}$ - numărul permutărilor de **n** elemente.

Combinări de n elemente luate cîte k - orice submulțime a mulțimii M, avînd fiecare cîte k elemente, $0\le k\le n$.

$\boxed{C_n^k = \dfrac{n!}{k!\cdot(n-k)!}}$, $0\le k\le n$ - numărul combinărilor de **n** elemente luate cîte **k.**

Formula de recurență pentru calculul numărului de combinări

Pentru orice $k, n\in\mathbb{N}$ cu $0\leqslant k< n$ este adevărată egalitatea:

$$C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}$$

Proprietăți: 1) $C_n^m = C_n^{n-m}$, $0 \le m \le n$; $m,n \in N$ 2) $C_{n+1}^{m+1} = C_n^m + C_n^{m+1}$; $0 \le m < n$; $m,n \in N$

3. $C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + ... + C_n^n = 2^n$, $n \in N$ - numărul tuturor submulțimilor unei mulțimi de n elemente.

4. $C_n^0 + C_n^2 + C_n^4 + ... = C_n^1 + C_n^3 + C_n^5 + ... = 2^{n-1}$

Binomul lui Newton

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \cdot a^{n-k} \cdot b^k = C_n^0 \cdot a^n + C_n^1 \cdot a^{n-1} \cdot b + C_n^2 \cdot a^{n-2} \cdot b^2 + ... + C_n^{n-1} \cdot a \cdot b^{n-1} + C_n^n \cdot b^n$$

$T_{k+1} = C_n^k \cdot a^{n-k} \cdot b^k$; $k = 0,1,2,...n$ - formula termenului de rang (k+1) al dezvoltării binomului lui Newton.

Triunghiul lui Pascal:

1	C_0^0	$(a+b)^0 = 1$
1 1	C_1^k	$(a+b)^1 = a+b$
1 2 1	C_2^k	$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
1 3 3 1	C_3^k	$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$
1 4 6 4 1	C_4^k	$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$
1 5 10 10 5 1	C_5^k	$(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$
1 6 15 20 15 6 1	.	....
1 7 21 35 35 21 7 1	.	
1 8 28 56 70 56 28 8 1	.	
....		

➢ Suma coeficienților binomiali C_n^k, $0 \le k \le n$, este egală cu 2^n.

➢ Suma coeficienților binomiali de rang par este egală cu suma coeficienților binomiali de rang impar și este 2^{n-1}.

Formulele înmulțirii prescurtate

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$

$a^2 + b^2 = (a+b)^2 - 2ab$

$a^2 + b^2 = (a-b)^2 + 2ab$

$a^4 + b^4 = (a^2 \pm b^2)^2 \mp 2a^2b^2$

$(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ac$

$a^2 + b^2 + c^2 = (a+b+c)^2 - 2(ab+bc+ac)$

$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a+b)$

$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 = a^3 - b^3 - 3ab(a-b)$

$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$

$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$

$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + ... + ab^{n-2} + b^{n-1})$, $\forall n \in N, n \ge 2$

$a^n + b^n = (a+b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 - a^{n-4}b^3 + ... - ab^{n-2} + b^{n-1})$, $\forall n \in N$, n - impar, $n \ge 3$

PROBABILITATE

Definitie. Pobabilitatea unui eveniment este egala cu raportul dintre numarul cazurilor favorabile (m) care realizeaza evenimentul si numarul cazurilor egal posibile(n).

$$P(A) = \frac{m}{n}$$

Exemple de itemi de tip examen de bacalaureat

ELEMENTE DE COMBINATORICA

1. Câte numere naturale de trei cifre distincte se pot forma cu elemente ale mulţimii {2,4,6,8}
2. Câte numere naturale de patru cifre distincte se pot forma cu cifre din mulţimea {1,3,5,7,9}
3. Să se rezolve ecuaţia $C_n^8 = C_n^{10}$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 10$.
4. Să se arate că $C_{17}^3 > C_{17}^{15}$.
5. Să se determine $\mathbb{N}$, $x \geq 2$, astfel încât $C_x^2 + A_x^2 = 30$.
6. Să se calculeze $C_{16}^0 + C_{16}^2 + C_{16}^4 + \cdots + C_{16}^{16}$.
7. Să se determine $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, astfel încât $3C_n^1 + 2C_n^2 = 8$.
8. Să se determine $x \in \mathbb{N}$, $x \geq 3$ ştiind că $C_x^{x-1} + C_{x-1}^{x-3} \leq 9$.
9. Să se arate că 11 divide numărul $C_{11}^1 + C_{11}^2 + \cdots + C_{11}^{10}$.
10. Într-o clasă sunt 22 de elevi, dintre care 12 sunt fete. Să se determine în câte moduri se poate alege un comitet reprezentativ al clasei format din 3 fete şi 2 băieţi.

BINOMUL LUI NEWTON

1. Să se determine $a > 0$ ştiind că termenul din mijloc al dezvoltării $(\sqrt[3]{a} + \frac{1}{\sqrt[4]{a}})^{12}$ este egal cu 1848.

2. Să se determine termenul care nu conţine pe x din dezvoltarea $(x^2 + \frac{1}{x})^9$.

3. Se consideră dezvoltarea $(\sqrt[3]{x^2} + \sqrt{y})^{49}$. Să se determine termenul care îi conţine pe x şi y la aceeaşi putere.

4. Să se determine termenul care nu-l conţine pe x , din dezvoltarea $(\sqrt[3]{x} + \frac{2}{\sqrt{x}})^{200}$, $x > 0$.

5. Să se determine numărul termenilor raţionali din dezvoltarea $(3 + \sqrt[3]{3})^{10}$.

7. Să se determine numărul termenilor raţionali din dezvoltarea binomului $(\sqrt{2} + 1)^5$.

8. Să se determine numărul termenilor raţionali ai dezvoltării $(\sqrt[4]{5} + 1)^{100}$.

9. Să se determine numărul termenilor iraţionali ai dezvoltării $(\sqrt{3} + 1)^9$.

10. Suma coeficienţilor binomiali ai dezvoltării $(2-5y)^n$ este egală cu 32. Să se determine termenul de rang patru.

MATEMATICA APLICATA. PROBABILITATI

1. Se consideră mulţimea $A = \{1,2,3,...,10\}$. Să se determine numărul submulţimilor cu trei elemente ale mulţimii A, care conţin elementul 1.

2. Să se determine probabilitatea ca, alegând un număr $\overline{ab}$ din mulţimea numerelor naturale de două cifre, să avem $a \neq b$.

3. Să se determine probabilitatea ca, alegând un număr din mulţimea numerelor naturale de două cifre, acesta să fie pătrat perfect.

4. Să se determine probabilitatea ca, alegând un număr din mulţimea numerelor naturale de trei cifre, acesta să aibă exact două cifre egale.

5. Să se determine probabilitatea ca, alegând un număr ab din mulţimea numerelor naturale de două cifre, să avem $a + b = 4$.

6. Care este probabilitatea ca, alegând un număr k din mulţimea $\{0,1,2,...,7\}$, numărul C_k^7 să fie prim.

7. Să se determine probabilitatea ca, alegând un număr din mulţimea numerelor naturale de trei cifre, acesta să aibă toate cifrele pare.

8. Să se determine probabilitatea ca, alegând un element din mulţimea $\{1,2,3,...,40\}$, numărul $2^{n+2} \cdot 6^n$ să fie pătrat perfect.

9. Să se determine probabilitatea ca, alegând un număr din mulţimea $\{10,11,12,...,40\}$, suma cifrelor lui să fie divizibilă cu 3.

10. Fie mulţimea $M = \{1,2,3,4,5,6\}$. Să se determine probabilitatea ca, alegând una dintre submulţimile mulţimii M , aceasta să aibă 2 elemente.