**Proiect cofinanţat din Fondul Social European prin Programul Operaţional Sectorial Dezvoltarea Resurselor Umane 2007-2013**
**Axa prioritară 1** „Educaţia şi formarea profesională în sprijinul creşterii economice şi dezvoltării societăţii bazate pe cunoaştere"
**Domeniul major de intervenţie 1.1** „Acces la educaţie şi formare profesională iniţială de calitate"
**Titlul proiectului:** „TEEN PERFORM - Program inovator de îmbunătăţire a rezultatelor şcolare în învăţământul liceal"
**Contract număr:** POSDRU/153/1.1/S/136612
**Beneficiar:** Inspectoratul Şcolar Judeţean Suceava

**Disciplina MATEMATICĂ**
**FIŞĂ DE LUCRU**

# Tema/Unitatea: Funcţii. Funcţia de gradul I. Funcţia şi ecuaţia de gradul al II-lea

***Expert educaţie: prof. Monoranu Mihaela Doina, Colegiul Tehnic „Mihai Băcescu" Fălticeni***

## *Breviar teoretic*

### *Funcţii*

**Def.** Fie A şi B două mulţimi nevide. Spunem că am definit **o funcţie** pe mulţimea A cu valori în B dacă printr-un procedeu oarecare facem ca **fiecărui element** $x \in A$ să-I corespundă **un singur element** $y \in B$.

- funcţie definită pe A cu valori în B se notează $f : A \to B$, A = **domeniul de definiţie**; B = **codomeniul**;
- Fie $f : A \to B$. Se numeşte **imagine a funcţiei** $f$, notată Im$f$ sau $f(A)$, partea lui B constituită din toate imaginile elementelor lui A. Deci, Im$f$ = V(A) = $\{f(x) \mid x \in A\}$ sau Im$f$ = $\{y \in B \mid \exists x \in A$ astfel încât $f(x) = y\}$.
- Funcţia $f$ este **strict crescătoare** pe I dacă: $(\forall)x_1, x_2 \in I$, $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$
- Funcţia $f$ este **strict descrescătoare** pe I dacă: $(\forall)x_1, x_2 \in I$, $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$
- $D \subset R$ se numeşte **mulţime simetrică** dacă $\forall x \in D \Rightarrow -x \in D$.
- Fie $f : D \to R$, D simetrică, $f$ s.n. **funcţie pară** $\forall x \in D$ $f(-x) = f(x)$ şi $f$ s.n**. funcţie impară** $\forall x \in D$ $f(-x) = -f(x)$
- Dacă există $x_0 \in I$ astfel încât $f(x) \leq f(x_0)$, $\forall x \in I$, atunci $f(x_0)$ se numeşte **maximul funcţiei *f* pe mulţimea I** şi scriem $f(x_0) = \max f(x)$. Punctul $x_0$ pentru care se obţine valoarea maximă a lui $f$ pe I se numeşte **punct de maxim pentru funcţia *f* pe I.**(fig. 1)
- Dacă există $x_1 \in I$ astfel încât $f(x) \geq f(x_1)$, $\forall x \in I$, atunci $f(x_1)$ se numeşte **minimul funcţiei *f* pe mulţimea I** şi scriem $f(x_1) = \min f(x)$. Punctul $x_1$ pentru care se obţine valoarea minimă a lui $f$ pe I se numeşte **punct de minim pentru funcţia *f* pe I.**
- O functie $f$: $A \to B$ se numeste **functie injectiva** ( sau simplu **injectie**) daca orice element din B este imaginea prin $f$ a el mult unui element din A, ceea ce-I echivalent cu faptul ca pentru orice $y \in B$ ecuatia $f(x) = y$ are cel ,ult o solutie $x \in A$. Altfel spus, functia $f$ este injective daca si numai daca doua elemente diferite oarecare din A au imagini diferite in B prin $f$, adica $f$: $A \to B$ este injectiva $\Leftrightarrow \forall x_1, x_2 \in A$ , $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$.
- O functie $f$: $A \to B$ se numeste **functie surjectiva** ( sau simplu **surjectie**), daca orice element din B este imaginea prin $f$ a cel putin unui element din A, ceea ce-i echivalent cu faptul ca pentru orice $y \in b$ ecuatia $f(x) = y$ are cel putin o solutie $x \in A$.
- O functie $f$: $A \to B$ se numeste **functie bijectiva** ( sau simplu **biejctie**), daca este atat injective cat si surjectiva
- Fie $f$: $A \to B$ o functie bijectiva. Se numeste **functie inversa** a functiei $f$, functia $g$: $B \to A$, care asociaza fiecarui element y din B elementul unic x din A astfel incat $f(x) = y$. Pentru functia $g$ utilizam

notatia $f^{-1}$ (citim "f la minus unu"). O functie $f$ care are inversa se spune ca este **invesabila**. Functia $f$ se numeste **functie directa**, iar $f^{-1}$ **functie inversa** (a lui $f$).

- Fie A, B, C mulţimi nevide şi funcţiile $f : A \to B$, $g : B \to C$. Se numeşte **compusa funcţiei g cu funcţia** $f$ (sau funcţia compusă din $f$ şi g), considerată în această ordine, funcţia notată $g\circ f$ , definită astfel:
  $g\circ f : A \to C$, $(g\circ f)(x) = g(f(x))$, $\forall x \in A$.

## Funcţia de gradul I

- Funcţia $f : R \to R$, $f(x) = ax + b$, $a, b \in R$ se numeşte **funcţie afină**.
- Dacă $a \neq 0$, atunci $f$ se numeşte **funcţie de gradul întâi** de coeficienţi a, b. Dacă $a \neq 0$ şi $b = 0$ atunci $f$ se numeşte **funcţie liniară** ($f(x) = ax$).
- **Funcţia de gradul întâi $f : R \to R$, $f(x) = ax + b$, $a \neq o$ este:**
  **strict crescătoare** daca $a > 0$; **strict descrescătoare** dacă $a < 0$.
- Funcţia de gradul întâi $f : R \to R$, $f(x) = ax + b$, $a \neq 0$ are zeroul $x = -\frac{b}{a}$, iar semnul funcţiei este dat în tabelul de semn:

| x | $-\infty$ | | $-\frac{b}{a}$ | | $\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | | semn contrar lui a | 0 | acelaşi semn cu a | |

- Graficul funcţiei de gradul întâi este o dreaptă oblică de ecuaţie $y = ax + b$. Pentru trasarea unei drepte sunt necesare două puncte care aparţin graficului.

## Funcţia de gradul al doilea

- Funcţia $f : R \to R$, $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a, b, c \in R$, $a \neq 0$ se numeşte **funcţie de gradul al doilea** (sau funcţie pătratică) cu coeficienţii a, b, c.
- Fie funcţia de gradul doi $f : R \to R$, $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$.
- Dacă $a > 0$, atunci $f$ este **strict descrescătoare** pe $(-\infty, -\frac{b}{2a}]$ şi $f$ este **strict crescătoare** pe $[-\frac{b}{2a}, +\infty)$
- Dacă $a < 0$, atunci $f$ este **strict crescătoare** pe $(-\infty, -\frac{b}{2a}]$ şi $f$ este **strict descrescătoare** pe $[-\frac{b}{2a}, +\infty)$

**Fie : $R \to R$, $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$.**

- Dacă $\Delta > 0$, atunci ecuaţia ataşată lui $f$ are două rădăcini reale distincte $x_1 < x_2$, iar semnul lui $f$ este cel al lui a în afara rădăcinilor şi semn contrar lui a între rădăcini:

| x | $-\infty$ | | $x_1$ | | $x_2$ | | $\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| f(x) | | Semnul lui a | 0 | Semn opus lui a | 0 | Semnul lui a | |

- Dacă $\Delta = 0$, atunci ecuaţia ataşată lui $f$ are două rădăcini reale egale $x_1 = x_2 = -b/2a$, iar semnul funcţiei $f$ este cel al lui a pe R/{-b/2a}

| x | $-\infty$ | $\frac{-b}{2a}=x_1=x_2$ | $\infty$ |
|---|---|---|---|
| f(x) | Semnul lui a | 0 | Semnul lui a |

- Dacă $\Delta < 0$, atunci ecuaţia ataşată lui $f$ nu are rădăcini reale, iar semnul funcţiei $f$ este semnul lui a pe R.

| x | $-\infty$ $\quad$ $\infty$ |
|---|---|
| f(x) | Semnul lui a |

- *Forma generală* a **ecuației de gradul doi** este: $ax^2+bx+c=0$, unde: x este variabila, iar a, b, și c constantele (a ≠ 0). Dacă constanta a = 0, atunci ecuația devine o ecuație liniară.
- Rădăcinile ecuației algebrice de gradul doi se obțin cu ajutorul formulei $x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2\cdot a}$, unde

  $\Delta = b^2 - 4\cdot a\cdot c$
- Notam cu $S=x_1+x_2=-\frac{b}{a}, P=x_1.x_2=\frac{c}{a}$ numite **relatiile lui Viete.**
- $\begin{cases} x_1^2+x_2^2=S^2-2P \\ x_1^3+x_2^3=S^3-3SP \end{cases}$
- Daca $x_1, x_2$ sunt solutiile reale ale ecuatiei $ax^2+bx+c=0, a\neq 0$ atunci exista egalitatea: $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$
- Forma ecuatiei de gradul al doilea care are ca solutii pe $x_1, x_2$ are forma $x^2-Sx+P=0$ cu S si P dati mai sus.

# Exemple de itemi de tip examen de bacalaureat

## I. Funcţii.

1. Se consideră funcţia $f:R\to R,\ f(x)=2x+1.$ Să se calculeze $f(-2)+f(-1)+f(0)+f(1).$
2. Fie funcţia $f:R\to R,\ f(x)=mx^2-8x-3,$ unde $m$ este un număr real nenul. Să se determine $m$ ştiind că valoarea maximă a funcţiei *f* este egală cu 5.
3. Fie funcţiile $f,g:R\to R,\ f(x)=x^2-x+1$ şi $g(x)=x+4.$ Să se calculeze coordonatele punctulului de intersecţie al graficelor funcţiilor *f* şi *g*.
4. Fie funcţia $f:R\to R,\ f(x)=mx^2-mx+2,$ unde $m$ este un număr real nenul. Să se determine numărul real nenul $m$ ştiind că valoarea minimă a funcţiei este egală cu 1.
5. Să se determine $m\in R$, ştiind că reprezentarea grafică a funcţiei $f:R\to R,\ f(x)=x^2-mx+m-1$ este tangentă axei $Ox$.
6. Se consideră funcţia $f:R\to R,\ f(x)=x^2-11x+30.$ Să se calculeze $f(0)\cdot f(1)\cdot\ldots\cdot f(6).$
7. Fie funcţia $f:R\to R,\ f(x)=x^2+5x+m+6$. Să se determine valorile numărului real m ştiind că $f(x)\geq 0$, pentru $\forall x\in R.$

8. Se consideră funcţia $f:R\to R,\ f(x)=x^2-6x+5$. Să se determine punctul de intersecţie al dreptei de ecuaţie $y=-4$ cu reprezentarea grafică a funcţiei *f*.
9. Se consideră funcţia $f:R\to R,\ f(x)=x^2-3x+1$. Să se determine numerele reale *m* pentru care punctul $A(m;-1)$ aparţine graficului funcţiei *f*.
10. Să se determine punctele de intersecţie ale graficelor funcţiilor $f,g:R\to R,\ f(x)=x^2-3x-1$ şi $g(x)=x+4$.

## II. Ecuația de gradul al doilea. Inecuații

1. Să se calculeze $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}$, ştiind că $x_1$ şi $x_2$ sunt soluţiei ecuaţiei $x^2-x-2=0$.
2. Să se determine $m\in R$, ştiind că $\{x\in R\mid x^2-(m+2)x+m+1=0\}=\{1\}$.
3. Să se demonstreze că, dacă $a\in R^*$, atunci ecuaţia $ax^2-(2a+1)x+a+1=0$ are două soluţii reale distincte.
4. Să se demonstreze că pentru orice *a* real, ecuaţia de gradul al doilea $(1+\cos a)x^2-(2\sin a)x+1-\cos a=0$ admite soluţii reale egale.
5. Să se demonstreze că ecuaţia $x^2-2x+1+a^2=0$ nu admite soluţii reale, oricare ar fi $a\in R^*$.
6. Se consideră ecuaţia $x^2+mx+2=0$ cu soluţiile $x_1$ şi $x_2$. Să se determine valorile reale ale lui *m* pentru care $(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=5$.
7. Să se formeze o ecuaţie de gradul al doilea, ştiind că aceasta are soluţiile $x_1=2$ şi $x_2=3$.
8. Se consideră ecuaţia $x^2-x+m=0$ cu soluţiile $x_1$ şi $x_2$.Să se determine numărul *m* pentru care $\frac{1}{x_1+1}+\frac{1}{x_2+1}=-\frac{3}{4}$.
9. Să se determine $m\in R$ astfel încât $x^2-(m-3)x+m-3>0$, pentru orice *x* real.
10. Să se determine valorile reale ale parametrului *m* ştiind că soluţiile $x_1$ şi $x_2$ ale ecuaţiei $x^2+(m-1)x+3=0$ verifică egalitatea $x_1=3x_2$.
11. Să se arate că soluţiile $x_1$ şi $x_2$ ale ecuaţiei $x^2-x-1=0$ verifică relaţia $x_1^2+x_2^2=x_1+x_2+2$.
12. Ştiind că $x_1$ şi $x_2$ sunt soluţiile ecuaţiei $x^2-2008x+1=0$, să se calculeze $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}$.
13. Să se determine valorile reale ale numărului *m* ştiind că soluţiile $x_1$ şi $x_2$ ale ecuaţiei $x^2-mx-m-6=0$ verifică relaţia $4(x_1+x_2)+x_1x_2=0$.
14. Să se demonstreze că pentru orice $m\in R$ ecuaţia $x^2+mx-m^2-1=0$ are două soluţii reale distincte.
15. Se consideră ecuaţia de gradul al II –lea $x^2-x+m=0$. Să se determine $m\in R$ astfel încât ecuaţia să admită soluţii de semne contrare.
16. Se dă ecuatia $(m+1)x^2-(m^2+m+6)x+6m=0, m\in \mathbf{Z}$;

a)Sa se determine valorile lui $m$ pentru care ecuatia are ambele radacini intregi si pozitive. In acest caz, sa se rezolve ecuatia.

b)Sa se determine valorile lui $m$ astfel incat $\frac{1}{x_1^2}+\frac{1}{x_2^2}=\frac{m+7}{18}$