UNIUNEA EUROPEANĂ
GUVERNUL ROMÂNIEI
Fondul Social European POSDRU 2007-2013
Instrumente Structurale 2007-2013
MINISTERUL EDUCAȚIEI NAȚIONALE
OIPOSDRU
Inspectoratul Școlar Județean Suceava
FONDUL SOCIAL EUROPEAN
Investeşte în OAMENI

Proiect cofinanţat din Fondul Social European prin Programul Operaţional Sectorial Dezvoltarea Resurselor Umane 2007-2013
Axa prioritară 1 „Educaţia şi formarea profesională în sprijinul creşterii economice şi dezvoltării societăţii bazate pe cunoaştere”
Domeniul major de intervenţie 1.1 „Acces la educaţie şi formare profesională iniţială de calitate”
Titlul proiectului: „TEEN PERFORM - Program inovator de îmbunătăţire a rezultatelor şcolare în învăţământul liceal”
Contract număr: POSDRU/153/1.1/S/136612
Beneficiar: Inspectoratul Şcolar Judeţean Suceava

Disciplina MATEMATICĂ
FIŞĂ DE LUCRU

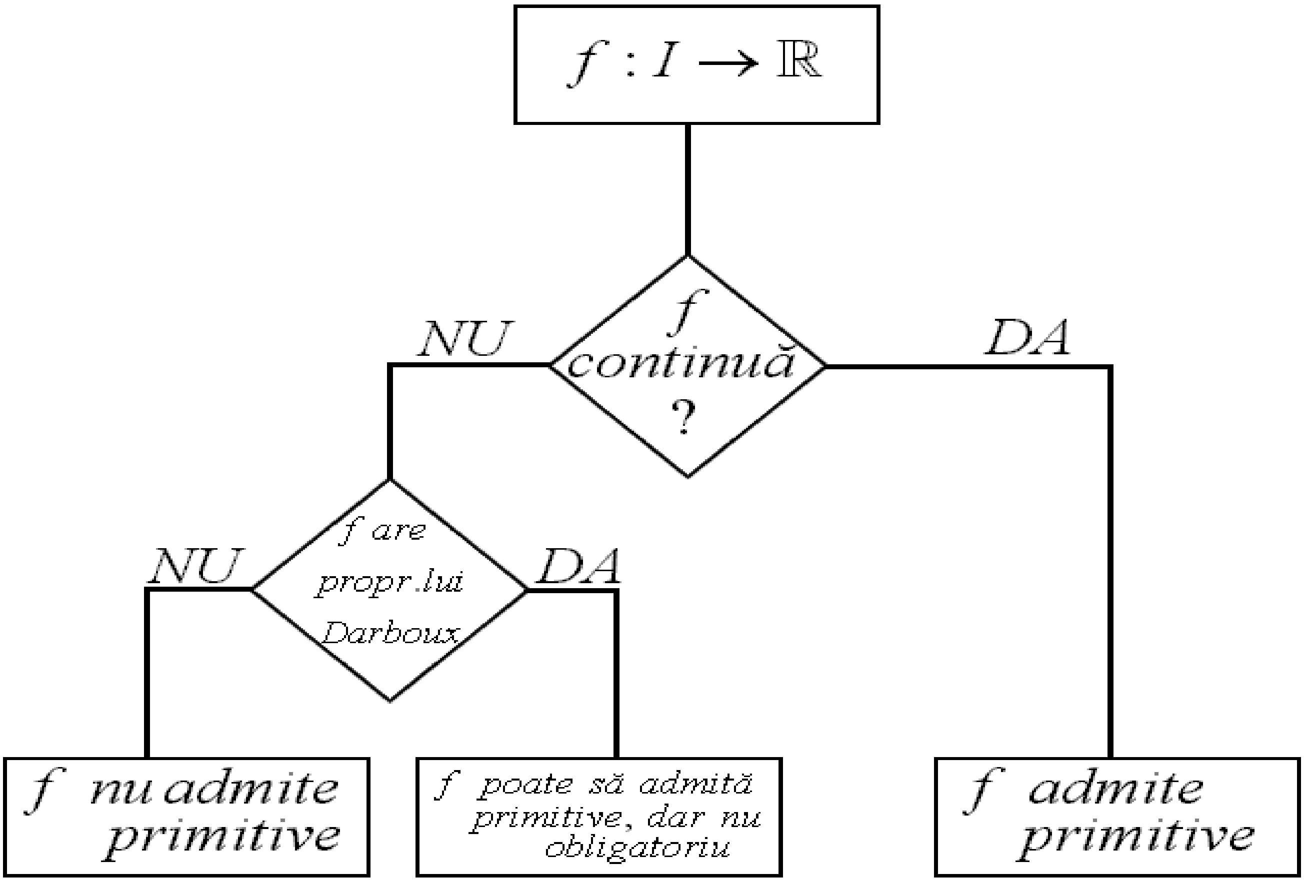
Tema/Unitatea: *Primitive*

Expert educație: prof. DOINA MONORANU

Breviar teoretic

PRIMITIVE

I. 1. Să se stabilească dacă o funcţie admite sau nu primitive:



I. 2. Proprietăţi ale funcţiilor care admit primitive:

a) Orice funcţie continuă pe un interval $I \subset R$ admite primitive pe I.
b) Dacă $f: I \to R$ şi $f(I)$ nu este interval, atunci f nu admite primitive pe I.
c) Fie $f: I \to R$ o funcţie care admite primitive. Atunci orice funcţie $g: I \to R$ care diferă de f într-o mulţime finită nevidă de puncte, nu are primitive.
d) Funcţia $f: I \to R$, care nu are proprietatea lui Darboux, nu admite primitive.
e) $(\exists)$ funcţii care admit primitive şi nu sunt continue (continuitatea de speţa a doua)
f) $(\exists)$ funcţii care au proprietatea lui Darboux şi nu au primitive.
g) $(\exists)$ funcţii care au primitive şi ale căror pătrate nu au primitive.

Observaţie: $C(I)$ - mulţimea funcţiilor continue pe I
$P(I)$ - mulţimea funcţiilor care admit primitive pe I
$Da(I)$ - mulţimea funcţiilor care au proprietatea lui Darboux.

$$\boxed{\Rightarrow C(I) \subset P(I) \subset Da(I)}$$

I.3. Definiţii:

Def.: Fie $f: I \to R,\ I \subset R$. f admite primitive pe I dacă $(\exists) F: I \to R$ astfel încât:
1) F derivabilă pe I
2) $F'(x) = f(x),\ (\forall) x \in I$

Def.: Dacă $f: I \to R$ admite primitive, mulţimea primitivelor lui f se numeşte integrala nedefinită a lui f şi se notează $\int f(x)dx = F(x) + c,\ c = \{C | C \in R\}$.

Propoziţie: Fie $f: I \to R, I \subset R$. Dacă $F_1, F_2: I \to R$ sunt două primitive ale funcţiei f, atunci $(\exists)$ o constantă $c \in R$ astfel încât $F_1(x) = F_2(x) + c,\ (\forall) x \in I$.

I.4. Operaţii

Dacă $f, g: I \to R$ sunt două funcţii care admit primitive şi $\lambda \in R,\ \lambda \neq 0$, atunci $f+g$ şi λf admit primitive şi au loc relaţiile:

$$\begin{cases} 1. \int [f(x)+g(x)]dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx \\ 2. \int \lambda f(x)dx = \lambda \int f(x)dx \\ 3. \int f(x)dx = \int f(x)dx + c \end{cases}$$

I.5. Tabel de integrale nedefinite (elementare)

1. $\int \sin \alpha x dx = -\frac{1}{2}\cos \alpha x + c$

2. $\int \cos \alpha x dx = -\frac{1}{2}\sin \alpha x + c$

3. $\int e^x dx = e^x + c$

4. $\int e^{\alpha x} dx = \frac{1}{\alpha} e^{\alpha x} + c$

5. $\int \frac{1}{x \pm a} dx = \ln|x \pm a| + c$

6. $\int f'(x)dx = f(x) + c$

7. $\int dx = x + c$

8. $\int chx dx = shx + c$

9. $\int shx dx = -chx + c$

10. $\int \frac{1}{ch^2 x} dx = thx + c$

11. $\int \frac{1}{sh^2 x} dx = -cthx + c$

Funcţia (simplă)	**Derivata**	**Domeniul de derivabilitate**
c	0	R
x	1	R
$x^n, n \geq 1$ întreg	nx^{n-1}	R
x^r, r real	rx^{r-1}	cel puţin $(0,\infty)$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$(0,\infty)$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$	$(0,\infty)$
e^x	e^x	R
$a^x, a>0, a\neq 1$	$a^x \ln a$	R
$\sin x$	$\cos x$	R
$\cos x$	$-\sin x$	R
tgx	$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\cos x \neq 0$
$ctgx$	$\frac{-1}{\sin^2 x}$	$\sin x \neq 0$
$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$(-1,1)$
$\arccos x$	$\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$	$(-1,1)$
$arctgx$	$\frac{1}{1+x^2}$	R
$arcctgx$	$\frac{-1}{1+x^2}$	R

Funcţii (compuse)	**Derivata**
u	u'
$u^n, n\geq 1$întreg	$nu^{n-1}u',\ u>0$
$u^r, u>0$, r real	$ru^{r-1}u',\ u>0$
$\sqrt{u}\ (u\geq 0)$	$\frac{u'}{2\sqrt{u}}, (u>0)$
$\ln u, (u>0)$	$\frac{u'}{u}, (u>0)$
e^u	$e^u \cdot u'$
$a^u, a>0, a\neq 1$	$a^u \cdot u' \cdot \ln a$
$\sin u$	$\cos u \cdot u'$
$\cos u$	$-\sin u \cdot u'$
$tgu,\ (\cos u \neq 0)$	$\frac{1}{\cos^2 u}\cdot u',\ (\cos u \neq 0)$
$ctgu,\ (\sin u \neq 0)$	$\frac{-1}{\sin^2 u}\cdot u',\ (\sin u \neq 0)$

$\arcsin u,\ (u^2 \le 1)$	$\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\cdot u',\ (u^2<1)$
$\arccos u,\ (u^2 \le 1)$	$\frac{-1}{\sqrt{1-u^2}}\cdot u',\ (u^2<1)$
$arctgu$	$\frac{u'}{1+u^2}$
$arcctgu$	$\frac{-u'}{1+u^2}$

II. Integrarea prin părţi

Teoremă: Dacă $f, g : I \to R$ sunt funcţii derivabile cu derivate continue, atunci $f'g, fg', (fg)'$, admit primitive pe I şi sunt exprimate prin relaţia: $\int f(x)g'(x)dx = f(x)\cdot g(x) = \int f'(x)\cdot g(x)dx$

III.1 Prima metodă de schimbare de variabilă

Teoremă: Fie $I, J \subset R$ şi $\varphi : I \to J$, $f : J \to R$ funcţii cu proprietăţile:

1. φ derivabilă pe I

2. f admite primitive pe J (F este o primitivă a sa). Atunci funcţia $(f\circ\varphi)\cdot\varphi'$ admite primitiva pe I, iar $F\circ\varphi$ este o primitivă a lui $(f\circ\varphi)\cdot\varphi'$ de forma: $\int f(\varphi(x))\cdot\varphi'(x)dx = F(\varphi(x)) + C$

Observaţie: Etape: ***a)*** Fie $h : I \to R$ care are primitive

b) Se caută $I \xrightarrow{\varphi} J \xrightarrow{f} R$ astfel încât $h(x) = f(\varphi(x))\cdot\varphi'(x)$

c) Se caută o primitivă $\int f(t)dt = F(t) + c$

d) O primitivă a lui h este $H = F\circ\varphi$ adică $\int h(x)dx = \int f(\varphi(x))\cdot\varphi'(x) = F(\varphi(x)) + c$

e) Practic $\varphi(x) = t$ şi se diferenţiază ca o egalitate $\varphi(x) = t / d \Rightarrow d\varphi(x) = dt$

sau $\varphi'(x)dx = dt \Rightarrow \int f(\varphi(x))\cdot\varphi'(x) = \int f(t)\cdot dt = F(t) + c = F(\varphi(x)) + c$

III.2 Primitivele funcţiilor raţionale simple

1) $\int \frac{1}{(x-a)^n}dx = \frac{-1}{n-1}\frac{1}{(X-a)^{n-1}} + c$; $\int \frac{1}{x-a}dx = \ln|x-a| + c,\ n = 1$ **2)** $\int \frac{1}{ax^2+bx+c}$

cazul $\Delta > 0$: $$\frac{1}{a}\int \frac{1}{\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)^2}dx = \frac{1}{a}\frac{1}{2\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}}\ln\left|\frac{x+\frac{b}{2a}-\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}}{x+\frac{b}{2a}+\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}}\right| + c$$

cazul $\Delta = 0$: $$\frac{1}{a}\int \frac{1}{\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2}dx = -\frac{1}{a}\frac{1}{x+\frac{b}{2a}} + c$$

cazul $\Delta < 0$: $$\frac{1}{a}\int \frac{1}{\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{-\Delta}}{2a}\right)^2}dx = \frac{1}{a}\frac{1}{\frac{\sqrt{-\Delta}}{2a}}arctg\left(\frac{x+\frac{b}{2a}}{\frac{\sqrt{-\Delta}}{2a}}\right) + c$$

3) $I_n = \int \frac{1}{\left(x^2+a^2\right)^n}dx = \frac{1}{a^2}\left[\frac{1}{2(n-1)}\frac{x}{\left(a^2+x^2\right)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2(n-1)}\right]I_{n-1}$

Observație: În cazul $\left(ax^2+bx+c\right)^n = a^n\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{-\Delta}}{2a}\right)^2\right]^n = a^n\left(t^2+k^2\right)^n\ !\begin{cases} x+\frac{b}{2a}=t\ |d \\ \frac{\sqrt{-\Delta}}{2a}=k \end{cases} \Rightarrow dx = dt$

4) $f: I \to R,\ f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$, grad $P <$ grad Q

a) Dacă $Q(x)$ are rădăcini simple: $Q(x) = (x-a_1)(x-a_2)...(x-a_n)$ *unde* $a_1 \neq a_2 \neq ... \neq a_n \Rightarrow$

$$f(x) = \frac{P(x)}{(x-a_1)(x-a_2)...(x-a_n)} = \frac{A_1}{x-a_1} + \frac{A_2}{x-a_2} + ... + \frac{A_n}{x-a_n}$$

b) Dacă $Q(x)$ are rădăcini multiple: $Q(x) = (x-\alpha)^m \Rightarrow f(x) = \frac{P(x)}{(x-\alpha)^m} = \frac{B_1}{x-\alpha} + \frac{B_2}{(x-\alpha)^2} + \ +...+\frac{B_m}{(x-\alpha)^m}$

c) Dacă $Q(x)$ nu are rădăcini reale: $\left(\Delta_{1,2,...,p} < 0\right)$

$$Q(x) = \left(X^2+2b_1x+c_1\right)\left(X^2+2b_2x+c_2\right)...\left(X^2+2b_px+c_p\right)$$

$$f(x) = \frac{P(x)}{\left(X^2+2b_1x+c_1\right)\left(X^2+2b_2x+c_2\right)...\left(X^2+2b_px+c_p\right)} =$$

$$= \frac{C_1x+D_1}{X^2+2b_1x+c_1} + \frac{C_2x+D_2}{X^2+2b_2x+c_2} + ... + \frac{C_px+D_p}{X^2+2b_px+c_p}$$

d) Dacă $Q(x)$ nu are rădăcini reale: $\left(\Delta_{i=\overline{(1,n)}} < 0\right): Q(x) = \left(x^2+2b_qX+c_q\right)^s$

$$f(x) = \frac{P(x)}{\left(x^2+2b_qX+c_q\right)^s} = \frac{M_1X+N_1}{x^2+2b_qX+c_q} + \frac{M_2X+N_2}{\left(x^2+2b_qX+c_q\right)^2} + ... + \frac{M_sX+N_s}{\left(x^2+2b_qX+c_q\right)^s}$$

e) Dacă $Q(x)$ are în componență descompunerile a,b,c,d atunci:

$$Q(x) = (x-a_1)(x-a_2)...(x-a_n)(x-\alpha)^m\left(x^2-2b_1X+c_1\right)\cdot\left(x^2+2b_2X+c_2\right)...\left(x^2+2b_pX+c_p\right)\cdot$$

$$\cdot\left(x^2+2b_qX+c_q\right)^s \quad unde\ \Delta<0, \Delta_2<0, \Delta_p<0, \Delta_s<0$$

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{x-a_1} + \frac{A_2}{x-a_2} + ... + \frac{A_n}{x-a_n} + \frac{B_1}{x-\alpha} + \frac{B_2}{(x-\alpha)^2} + ... + \frac{B_m}{(x-\alpha)^m} + \frac{C_1x+D_1}{x^2+2b_1X+c_1} +$$

$$+ \frac{C_2x+D_2}{x^2+2b_2X+c_2} + ... + \frac{C_px+D_p}{x^2+2b_pX+c_p} + \frac{M_1x+N_1}{x^2+2b_qX+c_p} + \frac{M_2x+N_2}{\left(x^2+2b_qX+c_p\right)^2} + ... + \frac{M_sx+N_s}{\left(x^2+2b_qX+c_p\right)^s}$$

Observații:

1) Se determină constantele de la numărător și integrăm fiecare expresie în parte.

2) Pentru $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)},\ gradR < gradQ,\ g(x) = \frac{R(x)}{Q(x)}$ se tratează cu a,b,c,d,e (form.)

III.3 Primitivele funcţiilor raţionale simple

1. $\int R(\sin x,\cos x)dx;\ \int R(tgx)dx;\ N: tgx=t$

a) $N: tg\frac{x}{2}=t;\ \ F!\begin{cases}\sin x=\dfrac{2tg\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}}\\ \cos x=\dfrac{1-tg^2\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}}\end{cases};\ \ \frac{x}{2}=arctgt \Leftrightarrow x=2arctgt\,/\,d \Rightarrow dx=\frac{2}{1+t^2}dt$

$\int R\left(\frac{2t}{1+t^2},\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\frac{1}{1+t^2}dt$ **b)** R impară în $\sin x \Rightarrow \cos x=t$ **c)** R impară în $\cos x \Rightarrow \sin x=t$

d) R pară $\Rightarrow tgx=t,\ x=arctgt\,/\,d \Rightarrow dx=\frac{1}{1+t^2}dt,\ \sin x=\frac{\pm tgx}{\sqrt{1+tg^2x}},\cos x=\frac{\pm 1}{\sqrt{1+tg^2x}}$

2. $\int \sin^m x\cdot\cos^n x dx;\ m,n\in Z \Rightarrow \begin{cases}m\ \ impar \Rightarrow \cos x=t\\ n\ \ par \Rightarrow \sin x=t\end{cases}$

3. $\int R\left(x,\sqrt{a^2-x^2}\right)dx$ substituţia: $x=a\sin t'\ \ sau\ \ x=a\cos t\,/\,d \Rightarrow dx=a\cos tdt...\ \sqrt{a^2-x^2}=a\cos t$

4. $\int R\left(x,\sqrt{a^2+x^2}\right)dx$ substituţia: $x=atgt\,/\,d \Rightarrow dx=\frac{a}{\cos^2 t}dt,\ \sqrt{a^2+x^2}=\frac{a}{\cos t}$

5. $\int R\left(x,\sqrt{x^2-a^2}\right)dx$ $N:\ x=\frac{a}{\cos t}\ \ sau\ \ x=\frac{a}{\sin t}\,/\,d,\ \ dx=\frac{a\sin t}{\cos^2 t}dt$

6. $\int R\left(e^{\alpha x}\right)dx,\ \alpha\in R^*$ $N: e^{\alpha x}=t\,/\ln \Rightarrow \alpha x=\ln t \Rightarrow x=\frac{1}{2}\ln t\,/\,d \Rightarrow dx=\frac{1}{\alpha}\frac{1}{t}dt$

7. $\int R\left(x,x^{r_1},x^{r_2},x^{r_3}\right)dx,\ r_1=\frac{p_1}{q_1};r_2=\frac{p_2}{q_2};r_3=\frac{p_3}{q_3};\ q_1,q_2,q_3\in N^*,\ n=c.m.m.m.c\left(q_1,q_2,q_3\right)$. <u>Substituţie</u>: $x=t^n$.

8. $\int R\left(x,\sqrt{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)dx$ $N\ \sqrt{\frac{ax+b}{cx+d}}=t\,/^2 \Rightarrow \frac{ax+b}{cx+d}=t^2 \Rightarrow x=\frac{ax+b}{cx+d}\,/\,d \Rightarrow ...$

9. Substituţiile Euler: $\int R\left(x,\sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx$ **a.** $\Delta<0 \Rightarrow \sqrt{ax^2+bx+c}=\sqrt{a}\cdot x\pm t=xt\pm\sqrt{c}\ \ \left(a,c>0\right)$

b. $\Delta<0 \Rightarrow \sqrt{ax^2+bx+c}=t\left(x-x_0\right)$

10. $\int\frac{dx}{(mx+n)^p\sqrt{ax^2+bx+c}}$ Substituţie: $mx+n=\frac{1}{t}$

11. Substituţii pentru funcţii binome (Cebârşev): $\int x^m\left(ax^n+b\right)^p dx;\ m,n,p\in Q$

a. $p\in Z,\frac{m+1}{n}=\frac{r}{s}\Rightarrow x^{\frac{n}{s}}=t$ **b.** $\frac{m+1}{n}\in Z,\ p=\frac{r}{s}\Rightarrow\left(ax^2+b\right)^{\frac{1}{s}}=t$

c. $\frac{m+1}{n}+p\in Z,\ p=\frac{r}{s}\Rightarrow\left(a+bx^{-n}\right)^{\frac{1}{s}}=t$

12. $\int \frac{P(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx = Q(x)\sqrt{ax^2+bx+c} + \lambda\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$ grad Q = grad P - 1

Coeficienţii polinomului Q şi λ se determină prin derivare şi identificare.

13. $\int e^{\lambda x}P(x)dx = e^{\lambda x}Q(x)+c$, grad Q = grad P

14. $\int P(x)\sin\lambda dx = Q(x)\sin\lambda x + S(x)\cos\lambda x + C$. $Q(x)$ şi $S(x)$ se determină prin derivare şi identificare.

Tipuri de itemi

1. f : R → R, $f(x)=\begin{cases}2x, x<0\\3x, x\geq 0\end{cases}$ Să se arate că f admite primitive şi să se calculeze o primitivă a sa.

2. f : R → R, $f(x)=\begin{cases}\max(x,x^2,x^3), x\leq 0\\\min(x,x^2,x^3), x>0\end{cases}$ Să se arate că f admite primitive şi să se calculeze o primitivă a sa.

3. f : $\left(-\frac{1}{3},\infty\right)\to R$, $f(x)=\begin{cases}\ln(3x+1), x\in(-\frac{1}{3},0)\\mx \quad , x\geq 0\end{cases}$ $m\in R$ Să se arate că f admite primitive şi să se calculeze o primitivă a sa.

4. Se consideră funcţia f: $(0,\infty)\to$R, f(x)=$\frac{\ln x}{\sqrt{x}}$. Să se arate că funcţia F: $(0,\infty)\to$R, F(x)=$2\sqrt{x}(\ln x-2)$ este o primitivă a funcţiei f.

5. Se consideră funcţia f: R →R, f(x)=$\frac{1}{x^2+x+1}$. Să se arate că funcţia F: R →R, F(x)=$\frac{2\sqrt{3}}{3}\mathrm{arctg}\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)$ este o primitivă a funcţiei f.

6. Se consideră funcţia f: $[0,\infty)\to$R, f(x)=$\begin{cases}\frac{e^x-e^{-2x}}{x}, x>0\\1 \quad , x=0\end{cases}$.

Să se arate că funcţia f are primitive pe $[0,\infty)$.

7. Se consideră funcţia f: $[-1,1]\to$R, f(x)=arcsinx. Să se arate că funcţia g : $[-1,1]\to$R, g(x)=xf(x) are primitive, iar acestea sunt strict crescătoare.

8. Fie a şi b numere reale şi funcţia F: R →R ,F(x)=$\begin{cases}ax+b, & x<1\\\ln^2 x+1, x\geq 1\end{cases}$. Să se determine a şi b astfel încât funcţia F să fie o primitivă a unei funcţii f.

9. Se consideră funcţia f: R →R, f(x)=$\ln(1+\sin^2 x)$, Să se arate că orice primitivă a funcţiei f este crescătoare pe R.

10. Fie a şi b numere reale şi funcţia F: R →R ,F(x)=$\begin{cases}axe^x-x, & x\leq 0\\x\cos x+b, x>0\end{cases}$. Să se determine a şi b astfel încât funcţia F să fie o primitivă a unei funcţii f.