CONCURSUL INTERJUDEŢEAN DE MATEMATICĂ
"SPIRU HARET"
EDIŢIA A XV-A– 10 mai 2014

CLASA A IX-A

1. a) (3p) Demonstrați identitatea $\frac{1}{(3k+1)(3k+4)}=\frac{1}{3(3k+1)}-\frac{1}{3(3k+4)},\forall k\in\mathbb{N}.$

b) (4p) Să se arate că: $\frac{1}{1\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 7}+...+\frac{1}{(3n+1)(3n+4)}<\frac{1}{3},\forall n\in\mathbb{N}.$

2. a) (3p) Fie x,y,z numere reale pozitive. Să se demonstreze inegalitatea:

$$\frac{x+y+z}{3}\le\frac{x^2+y^2+z^2}{x+y+z}.$$

b) (4p) Determinați soluțiile reale (x,y,z) ale ecuației:

$$2a\sqrt{z-c}+2b\sqrt{x-a}+2c\sqrt{y-b}=x+y+z+a^2+b^2+c^2-a-b-c,$$

unde a,b,c sunt numere reale date.

3. a) (4p) Să se determine funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ care verifică relația:

$$f(x-3)+1\le x\le f(x)-2,\forall x\in\mathbb{R}.$$

b) (3p) Să se arate că numărul $a=f(-1)+f(1)+f(3)+...+f(2013)$ este pătrat perfect, unde f este funcția determinată la punctul a).

4. Fie $\triangle ABC$, $\triangle A'B'C'$ două triunghiuri oarecare în același plan și M, N, P mijloacele segmentelor $[AA'],[BB']$, respectiv $[CC']$. Să se arate că:

a) (3p) $\overrightarrow{MN}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{A'B'}\right)$;

b) (4p) $P_{\triangle MNP}\le\frac{1}{2}\left(P_{\triangle ABC}+P_{\triangle A'B'C'}\right).$

NOTĂ: Toate subiectele sunt obligatorii.
Fiecare subiect primeşte un punctaj de la 0 la 7.
Timp de lucru efectiv 3 ore.

CONCURSUL INTERJUDEȚEAN DE MATEMATICĂ
"SPIRU HARET"
EDIȚIA A XV-A– 10 mai 2014

BAREM DE CORECTARE-CLASA A IX-A

4. a) (3p) Demonstrați identitatea $\dfrac{1}{(3k+1)(3k+4)}=\dfrac{1}{3(3k+1)}-\dfrac{1}{3(3k+4)}, \forall k\in\mathbb{N}.$

b) (4p) Să se arate că: $\dfrac{1}{1\cdot 4}+\dfrac{1}{4\cdot 7}+...+\dfrac{1}{(3n+1)(3n+4)}<\dfrac{1}{3}, \forall n\in\mathbb{N}.$

a) Se demonstrează prin calcul direct	3p
b) Avem $\sum_{k=0}^{n}\dfrac{1}{(3k+1)(3k+4)}=\dfrac{1}{3}\sum_{k=0}^{n}\left(\dfrac{1}{(3k+1)}-\dfrac{1}{(3k+4)}\right)=\dfrac{1}{3}\left(1-\dfrac{1}{3n+4}\right)<\dfrac{1}{3}.$	4p

2. a) (3p) Fie x,y,z numere reale pozitive. Să se demonstreze inegalitatea:

$$\frac{x+y+z}{3}\le\frac{x^2+y^2+z^2}{x+y+z}.$$

b) (4p) Determinați soluțiile reale (x,y,z) ale ecuației:

$$2a\sqrt{z-c}+2b\sqrt{x-a}+2c\sqrt{y-b}=x+y+z+a^2+b^2+c^2-a-b-c,$$

unde a,b,c sunt numere reale date.

a) Inegalitatea este echivalentă cu : $(x+y+z)^2\le 3(x^2+y^2+z^2)\Leftrightarrow 2xy+2xz+2yz\le 2x^2+2y^2+2z^2\Leftrightarrow$ $0\le(x-y)^2+(x-z)^2+(y-z)^2$	2p 1p
b) Ecuația se mai scrie: $\left(\sqrt{x-a}-b\right)^2+\left(\sqrt{y-b}-c\right)^2+\left(\sqrt{z-c}-a\right)^2=0$ Finalizare $x=a+b^2, y=b+c^2, z=c+a^2.$	3p 1p

3. a) (4p) Să se determine funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ care verifică relația:

$$f(x-3)+1\le x\le f(x)-2, \forall x\in\mathbb{R}.$$

b) (3p) Să se arate că numărul $a=f(-1)+f(1)+f(3)+...+f(2013)$ este pătrat perfect, unde f este funcția determinată la punctul a).

a) Înlocuim în prima inegalitate pe x cu x+3 și obținem $f(x)\le x+2, \forall x\in\mathbb{R}$ Din a doua inegalitate deducem $f(x)\ge x+2, \forall x\in\mathbb{R}$ Finalizare $f(x)=x+2, \forall x\in\mathbb{R}$	2p 1p 1p
b) $a=1+3+5+...+2015=1008^2$, deci a este pătrat perfect.	3p

4. Fie $\triangle ABC$, $\triangle A'B'C'$ două triunghiuri oarecare în același plan și M, N, P mijloacele segmentelor $[AA'],[BB']$, respectiv $[CC']$. Să se arate că:

a) (3p) $\overrightarrow{MN}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{A'B'}\right)$;

b) (4p) $P_{\triangle MNP}\le\frac{1}{2}\left(P_{\triangle ABC}+P_{\triangle A'B'C'}\right)$.

a) Fie O un punct oarecare din plan. Avem $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{ON}-\overrightarrow{OM}=$	1p
$\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OB'}\right)-\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OA'}\right)=$	1p
$=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB'}-\overrightarrow{OA'}\right)=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{A'B'}\right)$	1p
b) $P_{\triangle MNP}=MN+MP+NP=$	1p
$=\frac{1}{2}\left\lvert\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{A'B'}\right\rvert+\frac{1}{2}\left\lvert\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{C'A'}\right\rvert+\frac{1}{2}\left\lvert\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{B'C'}\right\rvert\overset{\lvert\vec{u}+\vec{v}\rvert\le\lvert\vec{u}\rvert+\lvert\vec{v}\rvert}{\le}$	1p
$\le\frac{1}{2}\left(AB+AC+BC\right)+\frac{1}{2}\left(A'B'+A'C'+B'C'\right)=\frac{1}{2}P_{\triangle ABC}+\frac{1}{2}P_{\triangle A'B'C'}$	2p

Notă:
Orice altă soluţie corectă se va puncta corespunzător.