CONCURSUL INTERJUDEŢEAN DE MATEMATICĂ
"SPIRU HARET"
EDIŢIA A XV-A– 10 mai 2014

CLASA A XII-A

1. Se consideră mulțimea $G=\left\{A(x)=\begin{pmatrix}1+2x & 4x\\ -x & 1-2x\end{pmatrix} \mid x\in\mathbb{R}\right\}$.

a) (2p) Arătați că $A(x)A(y)=A(x+y), \forall x, \mathrm{y}\in\mathbb{R}$;

b) (3p) Demonstrați că $(G,\cdot)$ este grup în raport cu înmulțirea matricelor pătratice de ordin doi.

c) (2p) Calculați $\begin{pmatrix}3 & 4\\ -1 & -1\end{pmatrix}^n, n\in\mathbb{N}^*$.

2. Să se arate că funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\begin{cases}e^x\sin x, x<0\\ \dfrac{x^2}{x+1}, x\ge 0\end{cases}$ admite primitive pe mulțimea numerelor reale și să se determine o primitivă a funcției *f*.

3. Fie polinomul $f=X^4+aX^3+aX+1, a\in\mathbb{R}$ și x_1,x_2,x_3,x_4 rădăcinile lui.

a) (3p) Determinați $a\in\mathbb{R}$ astfel încât $x_1^{\ 2}+x_2^{\ 2}+x_3^{\ 2}+x_4^{\ 2}=1$;

b) (2p) Calculați $\dfrac{x_1^2-1}{x_1}+\dfrac{x_2^2-1}{x_2}+\dfrac{x_3^2-1}{x_3}+\dfrac{x_4^2-1}{x_4}$;

c) (2p) Calculați $(1-2x_1)(1-2x_2)(1-2x_3)(1-2x_4)$.

4. Pentru fiecare număr real *a* considerăm funcția $f_a:(a,\infty)\to\mathbb{R}, f_a(x)=\dfrac{1}{x-a}$.

a) (3p) Calculați $\int_2^3 f_1(x)\,dx$;

b) (4p) Arătați că pentru orice $a\in(1,\infty)$, numerele $\int_{a+1}^{2a} f_a(x)\,dx, \int_{a+1}^{a^2+a} f_a(x)\,dx, \int_{a+1}^{a^3+a} f_a(x)\,dx$ sunt în progresie aritmetică.

NOTĂ: Toate subiectele sunt obligatorii.
Fiecare subiect primeşte un punctaj de la 0 la 7.
Timp de lucru efectiv 3 ore.

CONCURSUL INTERJUDEŢEAN DE MATEMATICĂ
"SPIRU HARET"
EDIŢIA A XV-A– 10 mai 2014

BAREM DE CORECTARE-CLASA A XII-A

1. Se consideră mulțimea $G=\left\{A(x)=\begin{pmatrix}1+2x & 4x\\ -x & 1-2x\end{pmatrix} \mid x\in\mathbb{R}\right\}$.

a) (2p) Arătați că $A(x)A(y)=A(x+y), \forall x, y\in\mathbb{R}$;

b) (3p) Demonstrați că $(G,\cdot)$ este grup în raport cu înmulțirea matricelor pătratice de ordin doi.

c) (2p) Calculați $\begin{pmatrix}3 & 4\\ -1 & -1\end{pmatrix}^n, n\in\mathbb{N}^*$.

a) Se verifică prin calcul	2p
b) Verifică axiomele grupului	3p
c) Demonstrează prin inducție $\begin{pmatrix}3 & 4\\ -1 & -1\end{pmatrix}^n=\begin{pmatrix}1+2n & 4n\\ -n & 1-2n\end{pmatrix}, \forall n\geq 1$.	2p

2. Să se arate că funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\begin{cases} e^x\sin x, x<0\\ \dfrac{x^2}{x+1}, x\geq 0\end{cases}$ admite primitive pe mulțimea numerelor reale și să se determine o primitivă a funcției *f*.

f continuă pe $\mathbb{R}$, deci *f* admite primitive pe $\mathbb{R}$	1p
$\int e^x\sin x dx=\frac{e^x}{2}(\sin x-\cos x)+C$	2p
$\int\frac{x^2}{x+1}dx=\frac{x^2}{2}-x+\ln(x+1)+C$	2p
Finalizare $F(x)=\begin{cases}\frac{e^x}{2}(\sin x-\cos x+1), x<0\\ \frac{x^2}{2}-x+\ln(x+1), x\geq 0\end{cases}$	2p

3. Fie polinomul $f=X^4+aX^3+aX+1, a\in\mathbb{R}$ și x_1,x_2,x_3,x_4 rădăcinile lui.

a) (3p) Determinați $a\in\mathbb{R}$ astfel încât ${x_1}^2+{x_2}^2+{x_3}^2+{x_4}^2=1$;

b) (2p) Calculați $\frac{x_1^2-1}{x_1}+\frac{x_2^2-1}{x_2}+\frac{x_3^2-1}{x_3}+\frac{x_4^2-1}{x_4}$;

c) (2p) Calculați $(1-2x_1)(1-2x_2)(1-2x_3)(1-2x_4)$.

a) Scrie relațiile lui Viete: $s_1=-a, s_2=0, s_3=-a, s_4=1$	1p

$\sum_{k=1}^{4} x_k^2 = s_1^2 - 2s_2 = a^2$ Finalizare $a \in \{\pm 1\}$	1p 1p
b) $\sum_{k=1}^{4} \frac{x_k^2 - 1}{x_k} = \sum_{k=1}^{4} \left(x_k - \frac{1}{x_k} \right) = \sum_{k=1}^{4} x_k - \sum_{k=1}^{4} \frac{1}{x_k} = s_1 - \frac{s_3}{s_4} = 0$	2p
c) $\prod_{k=1}^{4} (1 - 2x_k) = 16 \prod_{k=1}^{4} \left(\frac{1}{2} - x_k \right) = 16 f\left(\frac{1}{2} \right) = 10a + 17$	2p

4. Pentru fiecare număr real a considerăm funcția $f_a : (a, \infty) \to \mathbb{R}, f_a(x) = \frac{1}{x-a}$.

a) (3p) Calculați $\int_2^3 f_1(x)\,dx$;

b) (4p) Arătați că pentru orice $a \in (1, \infty)$, numerele $\int_{a+1}^{2a} f_a(x)\,dx, \int_{a+1}^{a^2+a} f_a(x)\,dx, \int_{a+1}^{a^3+a} f_a(x)\,dx$ sunt în progresie aritmetică.

a) $\int_2^3 f_1(x)\,dx = \ln(x-1)\,\Big|_2^3 = \ln 2$	3p
b) $\int_{a+1}^{2a} f_a(x)\,dx = \ln a$ $\int_{a+1}^{a^2+a} f_a(x)\,dx = 2\ln a$ $\int_{a+1}^{a^3+a} f_a(x)\,dx = 3\ln a$ Finalizare	1p 1p 1p 1p

Notă:
Orice altă soluție corectă se va puncta corespunzător.