CONCURSUL INTERJUDEȚEAN DE MATEMATICĂ "SPIRU HARET" EDIȚIA A XV-A– 10 mai 2014

CLASA A XI-A

1. Fie matricea $A=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$.

a) (4p) Să se arate că dacă $X\in M_3(\mathbb{R})$ astfel încât $AX=XA$, atunci matricea X este de forma $X=\begin{pmatrix}a&b&c\\0&a&b\\0&0&a\end{pmatrix}, a,b,c\in\mathbb{R}$.

b) (3p) Să se demonstreze că ecuația $X^3=A$ nu are soluții în $M_3(\mathbb{R})$.

2. Considerăm sistemul de ecuații liniare: $\begin{cases}ax+y+z=1\\x+ay+z=1\\x+y+az=1\end{cases}$, $a\in\mathbb{R}$.

a) (2p) Calculați determinantul matricei sistemului;
b) (1p) Determinați parametrul real *a* pentru care sistemul este compatibil determinat;
c) (2p) Determinați parametrul real *a* pentru care sistemul este incompatibil;
d) (2p) Rezolvați sistemul pentru $a=0$.

3. Fie funcția $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}$.

a) (2p) Calculați derivata funcției *f*;
b) (2p) Determinați ecuația asimptotei spre $+\infty$ la graficul funcției *f*;
c) (3p) Rezolvați inecuația $\sqrt{x}\cdot f'(x)\le f(x)$.

4. Să se arate că dacă $f:\mathbb{R}\to(0,\infty)$ este o funcție continuă, atunci există $a\in(0,1)$ astfel încât $f(a)=\frac{a}{1-a}$.

NOTĂ: Toate subiectele sunt obligatorii.
Fiecare subiect primește un punctaj de la 0 la 7.
Timp de lucru efectiv 3 ore.

CONCURSUL INTERJUDEŢEAN DE MATEMATICĂ
"SPIRU HARET"
EDIŢIA A XV-A– 10 mai 2014

BAREM DE CORECTARE-CLASA A XI-A

1. Fie matricea $A=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$.

a) (4p) Să se arate că dacă $X\in M_3(\mathbb{R})$ astfel încât $AX=XA$, atunci matricea X este de forma $X=\begin{pmatrix}a&b&c\\0&a&b\\0&0&a\end{pmatrix}, a,b,c\in\mathbb{R}$.

b) (3p) Să se demonstreze că ecuația $X^3=A$ nu are soluții în $M_3(\mathbb{R})$.

$X=\begin{pmatrix}a&b&c\\d&e&f\\g&h&i\end{pmatrix}$, $AX=XA\Rightarrow d=g=h=0, e=i=a, f=b$	4p
$X^3=A\Rightarrow AX=XA\Rightarrow X=\begin{pmatrix}a&b&c\\0&a&b\\0&0&a\end{pmatrix}, a,b,c\in\mathbb{R}$.	1p
$X^3=\begin{pmatrix}a^3&3a^2b&3a^2c+3ab^2\\0&a^3&3a^2b\\0&0&a^3\end{pmatrix}$	1p
$X^3=A\Rightarrow a^3=0, 3a^2b=1,$ contradicție..	1p

2. Considerăm sistemul de ecuații liniare: $\begin{cases}ax+y+z=1\\x+ay+z=1\\x+y+az=1\end{cases}$, $a\in\mathbb{R}$.

a) (2p) Calculați determinantul matricei sistemului;
b) (1p) Determinați parametrul real *a* pentru care sistemul este compatibil determinat;
c) (2p) Determinați parametrul real *a* pentru care sistemul este incompatibil;
d) (2p) Rezolvați sistemul pentru $a=0$.

a) $\det A=\begin{vmatrix}a&1&1\\1&a&1\\1&1&a\end{vmatrix}=a^3-3a+2=(a-1)^2(a+2)$	2p
b) $\det A\neq 0\Leftrightarrow a\in\mathbb{R}\setminus\{1,-2\}$	1p
c) Sistemul este incompatibil $\Leftrightarrow rangA<rang\overline{A}$ pentru a=1, rezultă $rangA=rang\overline{A}=1\Rightarrow$ sistemul este compatibil nedeterminat	

pentru $a=-2$, obținem $rangA=2, rang\,\overline{A}=3 \Rightarrow$ sistemul este incompatibil	2p
d) Obținem soluția $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$	2p

3. Fie funcția $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=\dfrac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}$.

a) (2p) Calculați derivata funcției *f*;
b) (2p) Determinați ecuația asimptotei spre $+\infty$ la graficul funcției *f*;
c) (3p) Rezolvați inecuația $\sqrt{x}\cdot f'(x)\le f(x)$.

a) Obținem $f'(x)=\dfrac{-1}{\sqrt{x}\left(1+\sqrt{x}\right)^2}, \forall x>0$	2p
b) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=-1 \Rightarrow$ dreapta de ecuație y=-1 este asimptotă orizontală la graficul funcției Graficul funcției nu admite asimptote oblice	2p
c) Inecuația este echivalentă cu $\dfrac{-1}{\left(1+\sqrt{x}\right)^2}\le\dfrac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}} \Leftrightarrow -1\le\left(1+\sqrt{x}\right)\left(1-\sqrt{x}\right)\Leftrightarrow x\le 2$. Soluția inecuației este $S=\left(0,2\right]$	3p

4. Să se arate că dacă $f:\mathbb{R}\to(0,\infty)$ este o funcție continuă, atunci există $a\in(0,1)$ astfel încât $f(a)=\dfrac{a}{1-a}$.

Considerăm funcția $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, g(x)=(1-x)f(x)-x$	2p
Avem: f continuă pe $\mathbb{R}\Rightarrow g$ continuă pe $\mathbb{R}$, $g(0)g(1)=-f(0)<0$	3p
Din teorema Bolzano deducem că există $a\in(0,1)$ astfel încât $g(a)=0,$ de unde concluzia.	2p

Notă:
Orice altă soluţie corectă se va puncta corespunzător.