CONCURSUL INTERJUDEŢEAN DE MATEMATICĂ "SPIRU HARET" EDIŢIA A XV-A– 10 mai 2014

CLASA A X-A

1. Să se arate că funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f\left(x\right)=\dfrac{x^2-1}{x^2+1}$ nu este funcție injectivă sau surjectivă și determinați $x\in\mathbb{R}^*$ astfel încât $4f\left(x\right)+2f\left(\dfrac{1}{x}\right)=1.$

2. a) (2p) Demonstrați identitatea $\dfrac{1}{k\left(k+1\right)}=\dfrac{1}{k}-\dfrac{1}{k+1}, \forall k\in\mathbb{N}^*.$

b) (5p) Determinați produsul rădăcinilor ecuației:

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\left(\log_x 2014^{\frac{1}{k}}\right)\left(\log_x 2014^{\frac{1}{k+1}}\right)\right)+\frac{1}{\left(\log_{2014} x\right)^2}=2-\frac{1}{n+1}, x\in\left(0,\infty\right)\setminus\left\{1\right\}$$

3. Fie numerele $a=\sqrt{\sqrt{3}-\sqrt{2}}\left(\sqrt{\sqrt{3}-1}+\sqrt{\sqrt{3}+1}\right), b=\sqrt{\sqrt{3}+\sqrt{2}}\left(\sqrt{\sqrt{3}-1}-\sqrt{\sqrt{3}+1}\right).$
Să se arate că $a+b=0.$

4. Arătați că singurele numere complexe z de modul 1 care verifică relația $\left|\dfrac{iz}{\overline{z}}+\dfrac{\overline{z}}{iz}\right|=2$ sunt rădăcinile de ordin 4 ale lui -1.

NOTĂ: Toate subiectele sunt obligatorii.
Fiecare subiect primeşte un punctaj de la 0 la 7.
Timp de lucru efectiv 3 ore.

CONCURSUL INTERJUDEȚEAN DE MATEMATICĂ
"SPIRU HARET"
EDIȚIA A XV-A– 10 mai 2014

BAREM DE CORECTARE-CLASA A X-A

1. Să se arate că funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\frac{x^2-1}{x^2+1}$ nu este funcție injectivă sau surjectivă și determinați $x\in\mathbb{R}^*$ astfel încât $4f(x)+2f\left(\frac{1}{x}\right)=1$.

$f(1)=f(-1)\Rightarrow f$ nu este funcție injectivă	2p
$f(x)\neq 1, \forall x\in\mathbb{R}\Rightarrow f$ nu este funcție surjectivă	2p
$f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{1-x^2}{1+x^2}$	1p
Ecuația devine $2\left(\frac{x^2-1}{1+x^2}\right)=1\Leftrightarrow x^2=3\Leftrightarrow x\in\left\{\pm\sqrt{3}\right\}$	2p

2. a) (2p) Demonstrați identitatea $\frac{1}{k(k+1)}=\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}, \forall k\in\mathbb{N}^*$.

b) (5p) Determinați produsul rădăcinilor ecuației:

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\left(\log_x 2014^{\frac{1}{k}}\right)\left(\log_x 2014^{\frac{1}{k+1}}\right)\right)+\frac{1}{\left(\log_{2014}x\right)^2}=2-\frac{1}{n+1}, x\in(0,\infty)\setminus\{1\}$$

a) Se demonstrează prin calcul direct	2p
b) Ecuația se scrie $\left(\log_x 2014\right)^2\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}+\frac{1}{\left(\log_{2014}x\right)^2}=2-\frac{1}{n+1}\Leftrightarrow$	2p
$\left(\log_x 2014\right)^2\left(1-\frac{1}{n+1}+1\right)=2-\frac{1}{n+1}\Leftrightarrow\left(\log_x 2014\right)^2=1\Leftrightarrow\log_x 2014=\pm 1$	2p
Finalizare $x_1=2014, x_2=\frac{1}{2014}\Rightarrow x_1x_2=1$	1p

3. Fie numerele $a=\sqrt{\sqrt{3}-\sqrt{2}}\left(\sqrt{\sqrt{3}-1}+\sqrt{\sqrt{3}+1}\right), b=\sqrt{\sqrt{3}+\sqrt{2}}\left(\sqrt{\sqrt{3}-1}-\sqrt{\sqrt{3}+1}\right)$.

Să se arate că $a+b=0$.

$a^2=2$	2p
$b^2=2$	2p
$a>0, b<0$ și deoarece $a^2=b^2$, deducem $a=-b\Leftrightarrow a+b=0$	3p

4. Arătați că singurele numere complexe z de modul 1 care verifică relația $\left|\frac{iz}{\overline{z}}+\frac{\overline{z}}{iz}\right|=2$ sunt rădăcinile de ordin 4 ale lui -1.

$z\in\mathbb{C},\lvert z\rvert=1\Rightarrow z\overline{z}=1\Leftrightarrow\overline{z}=\frac{1}{z}$ …………………………………………………………………	1p
Demonstrăm cerința prin echivalență: $\left\lvert\frac{iz}{\overline{z}}+\frac{\overline{z}}{iz}\right\rvert=2\Leftrightarrow z^4=-1$. Avem: $\left\lvert\frac{iz}{\overline{z}}+\frac{\overline{z}}{iz}\right\rvert=2\Leftrightarrow\left\lvert iz^2+\frac{1}{iz^2}\right\rvert=2\Leftrightarrow\left\lvert\frac{-z^4+1}{iz^2}\right\rvert=2\Leftrightarrow\lvert -z^4+1\rvert=2\Leftrightarrow$ ……………………..	3p
$\lvert -z^4+1\rvert^2=4\Leftrightarrow\left(1-z^4\right)\left(1-\overline{z}^4\right)=4\Leftrightarrow 1-z^4-\overline{z}^4+\lvert z\rvert^8=4\Leftrightarrow z^4+\overline{z}^4=-2\Leftrightarrow$ $z^4+\frac{1}{z^4}=-2\Leftrightarrow\left(z^4+1\right)^2=0\Leftrightarrow z^4=-1$.………………………………………………………..	3p

Notă:
Orice altă soluţie corectă se va puncta corespunzător.