UNIUNEA EUROPEANĂ
GUVERNUL ROMÂNIEI
Fondul Social European POSDRU 2007-2013
Instrumente Structurale 2007-2013
MINISTERUL EDUCAŢIEI NAŢIONALE
OIPOSDRU
Inspectoratul Şcolar Judeţean Suceava

FONDUL SOCIAL EUROPEAN
Investeşte în OAMENI

Proiect cofinanţat din Fondul Social European prin Programul Operaţional Sectorial Dezvoltarea Resurselor Umane 2007-2013
Axa prioritară 1 „Educaţia şi formarea profesională în sprijinul creşterii economice şi dezvoltării societăţii bazate pe cunoaştere"
Domeniul major de intervenţie 1.1 „Acces la educaţie şi formare profesională iniţială de calitate"
Titlul proiectului: „TEEN PERFORM - Program inovator de îmbunătăţire a rezultatelor şcolare în învăţământul liceal"
Contract număr: POSDRU/153/1.1/S/136612
Beneficiar: Inspectoratul Şcolar Judeţean Suceava

Disciplina MATEMATICĂ
FIŞĂ DE LUCRU

Tema/Unitatea:Limite de functii.Asimptote. Functii continue

Expert educație: prof. *Doina Monoranu*

Breviar teoretic

Limite de funcții

Teoremă:O funcţie are limită într-un punct finit de acumulare dacă şi numai dacă are limite laterale egale în acel punct.

f are limită în $x_0 \Leftrightarrow l_s(x_0) = l_d(x_0) \Leftrightarrow f(x_0-0) = f(x_0+0) \Leftrightarrow \lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x<x_0}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x>x_0}} f(x)$

Obs.:Funcţia f :D $\to R$ nu are limită în punctul de acumulare x_0 în una din situaţiile :

a)există un şir $x_n \in D-\{x_0\}$ cu limita x_0 astfel încât şirul $(f(x_n))$ nu are limită

b)există şirurile $(x_n),(y_n), x_n, y_n \in D-\{x_0\}$, astfel încât şirurile $(f(x_n)),(f(y_n))$ au limite diferite.

Teoremă: Fie f :D $\to R$,o funcţie elementară şi $x_0 \in D$ un punct de acumulare al lui D$\Rightarrow \lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$

Teoremă(Criteriul majorării,cazul limitelor finite)

Fie f,g:D $\to R$ şi x_0 un punct de acumulare al lui D.Dacă $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = 0$ şi există $l \in R$ a.î.

$\left|f(x)-l\right| \le g(x), \forall x \in D\cap V, x \ne x_0$, V vecinătate a lui x_0 şi dacă $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = 0 \Rightarrow \lim\limits_{x\to x_0} f(x) = l$

Teoremă(Criteriul majorării,cazul limitelor infinite)

Fie f,g:D $\to R$, x_0 un punct de acumulare al lui D şi $f(x) \le g(x), \forall x \in D\cap V, x \ne x_0$,V vecinătate a lui x_0.

a)Dacă $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \infty \Rightarrow \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = \infty$

b)Dacă $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = -\infty \Rightarrow \lim\limits_{x\to x_0} f(x) = -\infty$

Teoremă(Criteriul cleştelui)

Fie f,g,h:D $\to R$, x_0 un punct de acumulare al lui D şi $f(x) \le g(x) \le h(x), \forall x \in D\cap V, x \ne x_0$, V vecinătate a lui x_0.

Dacă $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} h(x) = l \Rightarrow \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = l$

Limite uzuale.Limite remarcabile.

$\lim\limits_{x\to\pm\infty}(a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0) = \lim\limits_{x\to\pm\infty} a_n x^n$

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{a_kx^k+a_{k-1}x^{k-1}+\cdots+a_1x+a_0}{b_mx^m+b_{m-1}x^{m-1}+\cdots+b_1x+b_0}=\begin{cases}\dfrac{a_k}{b_m},k=m\\ 0,m\rangle k\\ \dfrac{a_k}{b_m}\cdot(\pm\infty)^{k-m},k\rangle m\end{cases}\qquad \lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0\qquad \lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x}=0\qquad \lim_{\substack{x\to0\\x<0}}\frac{1}{x}=-\infty$$

$$\lim_{\substack{x\to0\\x>0}}\frac{1}{x}=+\infty\qquad \lim_{x\to\infty}\sqrt{x}=\infty\qquad \lim_{x\to\infty}\sqrt[3]{x}=\infty\qquad \lim_{x\to-\infty}\sqrt[3]{x}=-\infty$$

$$\lim_{x\to\infty}a^x=\begin{cases}\infty\text{ , daca } a>1\\ 0\text{ , daca } a\in(0,1)\end{cases}\qquad \lim_{x\to-\infty}a^x=\begin{cases}0\text{ , daca } a>1\\ \infty\text{ , daca } a\in(0,1)\end{cases}$$

$$\lim_{x\to\infty}\log_a x=\begin{cases}\infty\text{ , daca } a>1\\ -\infty\text{ , daca } a\in(0,1)\end{cases}\qquad \lim_{\substack{x\to0\\x>0}}\log_a x=\begin{cases}-\infty\text{ , daca } a>1\\ \infty\text{ , daca } a\in(0,1)\end{cases}$$

$$\lim_{x\to\infty}\operatorname{arctg}x=\frac{\pi}{2}\qquad \lim_{x\to-\infty}\operatorname{arctg}x=-\frac{\pi}{2}\qquad \lim_{x\to\infty}arcctgx=0\qquad \lim_{x\to-\infty}arcctgx=\pi$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e\qquad \lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e\qquad \lim_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$$

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1\qquad \lim_{x\to0}\frac{tgx}{x}=1\qquad \lim_{x\to0}\frac{\arcsin x}{x}=1\qquad \lim_{x\to0}\frac{\operatorname{arctg}x}{x}=1$$

$$\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1\qquad \lim_{x\to0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a\quad ,\ a>0,a\neq1$$

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin u(x)}{u(x)}=1\qquad \lim_{x\to0}\frac{\operatorname{tg}u(x)}{u(x)}=1\qquad \lim_{x\to0}\frac{\arcsin u(x)}{u(x)}=1\qquad \lim_{x\to0}\frac{\operatorname{arctg}u(x)}{u(x)}=1$$

$$\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+u(x))}{u(x)}=1\qquad \lim_{x\to0}\frac{a^{u(x)}-1}{u(x)}=\ln a\quad ,\ a>0,a\neq1\text{ unde }\lim_{x\to x_0}u(x)=0$$

Operaţii fără sens: $\frac{\infty}{\infty},\frac{0}{0},\infty-\infty,0\cdot\infty,1^\infty,0^0,\infty^0$

Asimptote

1.Asimptote verticale

Definiţie: Fie f :E $\to R, a\in R$ punct de acumulare pentru E.Se spune că dreapta x = a este asimptotă verticală la stanga pentru f,dacă $\lim_{\substack{x\to a\\x<a}}f(x)=\infty$ sau $\lim_{\substack{x\to a\\x<a}}f(x)=-\infty$.

Definiţie: Fie f :E $\to R, a\in R$ punct de acumulare pentru E.Se spune că dreapta x = a este asimptotă verticală la dreapta pentru f,dacă $\lim_{\substack{x\to a\\x>a}}f(x)=\infty$ sau $\lim_{\substack{x\to a\\x>a}}f(x)=-\infty$.

Definiţie : Fie f :E $\to R, a\in R$ punct de acumulare pentru E.Se spune că dreapta x = a este asimptotă verticală pentru f dacă ea este asimptotă verticală atât la stânga cât şi la dreapta sau numai lateral.

2.Asimptote oblice

Teorema : Fie f :E $\to R,$ unde E conţine un interval de forma(a, ∞)

Dreapta y=mx+n,m$\neq 0$ este asimptotă oblică spre $+\infty$ la graficul lui f dacă şi numai dacă m,n sunt numere reale finite,unde m= $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}, n=\lim\limits_{x\to\infty}[f(x)-mx]$.Analog la -$\infty$.

3.Asimptote orizontale

Dacă $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=l, l$ număr finit atunci y = l este asimptotă orizontală spre $+\infty$ la graficul lui f.

Analog la -∞

Obs :O funcţie nu poate admite atât asimptotă orizontala cât şi oblică spre $+\infty$(-∞)

Funcţii continue

Definiţie Fie $f: D\to R$ şi $x_0\in$ D punct de acumulare pentru D

f este continuă în $x_0\in$ D dacă $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$

Dacă f nu este continuă în $x_0\in$ D,ea se numeşte discontinuă în x_0,iar x_0 se numeşte punct de discontinuitate.

Definiţii: Un punct de discontinuitate $x_0\in$ D este punct de discontinuitate de prima speţă pentru f ,dacă limitele laterale ale funcţiei f în punctul x_0 există şi sunt finite.

Un punct de discontinuitate $x_0\in$ D este punct de discontinuitate de speţa a doua dacă nu este de prima speţă.(cel puţin una din limitele laterale ale funcţiei f în punctul x_0 nu este finită sau nu există)

Teoremă: Fie $f: D\to R$ şi $x_0\in$ D punct de acumulare pentru D$\Rightarrow$f continuă în x_0 $\Leftrightarrow l_s(x_0)=l_d(x_0)=$ f(x_0)

Teoremă:Funcţiile elementare sunt continue pe domeniile maxime de definiţie.

Operaţii cu funcţii continue

Teoremă:Fie f,g:D$\to R$ continue pe D $\Rightarrow$f+g, $f\cdot g, \frac{f}{g}(g\neq 0), |f|, \max(f,g), \min(f,g)$ sunt funcţii continue pe D.

Compunerea a două funcţii continue este o funcţie continuă.

Teoremă: Fie f:[a,b]$\to$R o funcţie continuă a.î. f(a)f(b)<0 $\Rightarrow\exists$ $c\in(a,b)$ pentru care f(c)=0.

Exemple de itemi de tip examen de bacalaureat

1. Calculați:

   1. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{2x-6}{5x-15}$; 2. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x-2}{x-1}$; 3. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-9}{x^3-27}$; 4. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{3x+3}-\sqrt{x+7}}{4x-8}$;

   5. $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x<2}}\dfrac{x^2-2x}{x^2-4x+4}$; 6. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2-2x}{|x|}$; 7. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x^2+x}-\sqrt{2}}{x-1}$; 8. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 5x}{4x^2}$;

   9. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{tgx-1}{\sin^2 x-\cos^2 x}$; 10. $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{\sin(x^2+x-2)}{\sin(x^2 3x+2)}$; 11. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\dfrac{\ln(1+5x)}{5x^2}$; 12. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{e^{x-1}-1}{\sqrt{x}-1}$;

   13. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3-2x+6}{-5x^3+x}$; 14. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x^2}\cdot\ln(\cos x)$; 15. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}}(x-\dfrac{\pi}{3})\cdot tgx$;

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases}3^x+1, x\le 1\\ ax+2, x>1\end{cases}$.
   a) Să se determine valoarea parametrului real *a* astfel încât funcția *f* să fie continuă în punctul $x_0=1$.
   b) Să se determine ecuaţia asimptotei către $-\infty$ la graficul funcţiei *f*.
   c) Să se calculeze $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\left(f(x)-1\right)\cdot x\right)$.

3. Se consideră funcţia $f:R\to R$ de forma $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{e}\cdot e^x-1, x\le 1\\ \ln x, x>1\end{cases}$.
   a) Să se studieze continuitatea funcţie *f* în punctul $x_0=1$.
   b) Să se determine ecuaţia asimptotei oblice către $-\infty$ la graficul funcţiei *f*.

4. Se consideră funcţia $f:R\setminus\{-1\}\to R$ definită prin $f(x)=\dfrac{e^x}{x+1}$. Să se determine ecuaţia asimptotei către $-\infty$ la graficul funcţiei *f*.

5. Se consideră funcţia $f:R\setminus\{1\}\to R$ definită prin $f(x)=\dfrac{x^2+x+2}{x-1}$. Să se determine ecuaţia asimptotei oblice către $+\infty$ la graficul funcţiei *f*.

6. Se consideră funcţia $f:R\to R$, $f(x)=\left(x^2-2x+1\right)e^x$. Să se calculeze $\lim\limits_{x\to+\infty}x\left(\dfrac{f'(x)}{f(x)}-1\right)$.

7. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases}1+\sqrt{x}, x\ge 0\\ e^x, x<0\end{cases}$.
   a) Să se studieze continuitatea funcţiei *f* în punctul $x_0=0$.
   b) Să se determine ecuaţia asimptotei către $-\infty$ la graficul funcţiei *f*.