UNIUNEA EUROPEANĂ GUVERNUL ROMÂNIEI Fondul Social European POSDRU 2007-2013 Instrumente Structurale 2007-2013 MINISTERUL EDUCAȚIEI NAȚIONALE OIPOSDRU Inspectoratul Școlar Județean Suceava

FONDUL SOCIAL EUROPEAN Investeşte în OAMENI

Proiect cofinanţat din Fondul Social European prin Programul Operaţional Sectorial Dezvoltarea Resurselor Umane 2007-2013
Axa prioritară 1 „Educaţia şi formarea profesională în sprijinul creşterii economice şi dezvoltării societăţii bazate pe cunoaştere"
Domeniul major de intervenţie 1.1 „Acces la educaţie şi formare profesională iniţială de calitate"
Titlul proiectului: „TEEN PERFORM - Program inovator de îmbunătăţire a rezultatelor şcolare în învăţământul liceal"
Contract număr: POSDRU/153/1.1/S/136612
Beneficiar: Inspectoratul Şcolar Judeţean Suceava

Disciplina MATEMATICĂ
FIŞĂ DE LUCRU

Tema/Unitatea: *Derivata unei funcții. Rolul derivatelor de ordinul I și de ordinul al II-lea în studiul funcțiilor*

Expert educație: prof. Monoranu Doina

Breviar teoretic

I. Funcţii derivabile

Definiţie: Fie f:D $\to R$, $x_0 \in D$ punct de acumulare pentru D. Derivata într-un punct:

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

f este derivabilă în x_0 dacă limita precedentă există şi este finită.

- Dacă f este derivabilă în x_0, graficul funcţiei are în punctul $M_0(x_0, f(x_0))$ tangentă a cărei pantă este $f'(x_0)$.

Ecuaţia tangentei este: $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$.

Teoremă: Fie f:D→R , $x_0 \in D$ punct de acumulare pentru D⇒f este derivabilă în punctul de acumulare $x_0 \Leftrightarrow f_s'(x_0) = f_d'(x_0) \in$ R(finite) $\Leftrightarrow \lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \in R$.

Teoremă . Orice funcţie derivabilă într-un punct este continuă în acel punct.

	Derivatele funcţiilor elementare			Operaţii cu funcţii derivabile Reguli de derivare
1	$c' = 0$	**11**	$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$	**Teoremă:** Fie f,g:D $\to R$ derivabile pe D$\Rightarrow$f+g ,fg, $\frac{f}{g}$(g$\neq 0$)sunt funcţii derivabile pe D. Compunerea a două funcţii derivabile este o funcţie derivabilă.
2	$x' = 1$	**12**	$(\text{arctg}\,x)' = \frac{1}{x^2+1}$	$(f \pm g)' = f' \pm g'$
3	$(x^n)' = nx^{n-1}$	**13**	$(\text{arcctg}\,x)' = -\frac{1}{x^2+1}$	$(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$
4	$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	**14**	$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$(\lambda \cdot f)' = \lambda \cdot f'$
5	$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$	**15**	$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}$
6	$(e^x)' = e^x$	**16**	$(\sin x)' = \cos x$	$(f \circ u)' = f'(u) \cdot u'$
7	$(a^x)' = a^x \ln a$	**17**	$(\cos x)' = -\sin x$	
8	$(\ln x)' = \frac{1}{x}$	**18**	$(\text{tg}\,x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$	
9	$(\text{ctg}\,x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$	**19**	$\left(\sqrt{x^2-a^2}\right)' = \frac{x}{\sqrt{x^2-a^2}}$	
10	$\left(\sqrt{x^2+a^2}\right)' = \frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}}$	**20**	$\left(\sqrt{a^2-x^2}\right)' = -\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}$	

II. Proprietăţile funcţiilor derivabile

Definiţie:Fie f:D→R.Un punct $x_0 \in D$ se numeşte punct de maxim local(respectiv de minim local)al lui f dacă există o vecinătate U a punctului x_0 astfel încât $f(x) \leq f(x_0)$(respectiv $f(x) \geq f(x_0)$) pentru orice x $\in D \cap U$.

Dacă $f(x) \leq f(x_0)$(respectiv $f(x) \geq f(x_0)$) pentru orice $x \in D$ atunci x_0 se numeşte punct de maxim absolut(respectiv minim absolut)

Teoremă . (Fermat) Fie I un interval deschis şi $x_0 \in$ I un punct de extrem al unei funcţii f: I→R. Dacă f este derivabilă în punctul x_0 atunci $f'(x_0)=0$.

Definiţie:O funcţie f: [a, b] →R (a< b) se numeşte funcţie Rolle dacă este continuă pe intervalul compact [a, b] şi derivabilă pe intervalul deschis (a, b).

Teorema lui Rolle

Fie f: [a, b]→ R, a< b o funcţie Rolle astfel încât f(a)= f(b), atunci există cel puţin un punct c∈ (a, b) astfel încât $f'(c)=0$.

Teorema(teorema lui J. Lagrange). Fie f o funcţie Rolle pe un interval compact [a, b]. Atunci ∃ c∈ (a, b) astfel încât $f(b)- f(a)= (b- a)f'(c)$

Consecinţe:

- Dacă o funcţie derivabilă are derivata nulă pe un interval atunci ea este constantă pe acel interval.
- Dacă două funcţii derivabile au derivatele egale pe un interval atunci ele diferă printr-o constantă pe acel interval.

III. Rolul primei derivate

- Fie *f* o funcţie derivabilă pe un interval I.

Dacă $f'(x) > 0 (f'(x) \geq 0), \forall x \in \mathrm{I}$, atunci *f* este strict crescătoare(crescătoare) pe I.

Dacă $f'(x) < 0 (f'(x) \leq 0), \forall x \in \mathrm{I}$, atunci *f* este strict descrescătoare(descrescătoare) pe I.

- Fie f:D $\to R$,D interval şi $x_0 \in D$.Dacă :

1)f este continuă în x_0 2)f este derivabilă pe D-$\{x_0\}$ 3)există $\lim_{x \to x_0} f'(x) = l \in \overline{R}$ atunci f are derivată în x_0 şi $f'(x_0) = l$ .Dacă $l \in R$ atunci f este derivabilă în x_0.

Observaţie: Cu ajutorul primei derivate se stabilesc intervalele de monotonie ale unei funcţii derivabile şi se determină punctele de extrem local.

IV. Rolul derivatei a doua

T**eoremă**: Fie *f* o funcţie de două ori derivabilă pe I.

Dacă $f''(x) \geq 0, \forall x \in \mathrm{I}$, atunci *f* este convexă pe I.

Dacă $f''(x) \leq 0, \forall x \in \mathrm{I}$, atunci *f* este concavă pe I.

Definiţie: Fie *f* o funcţie continuă pe I si $x_0 \in \mathbf{I}$ punct interior intervalului. Spunem că x_0 este punct de inflexiune al graficului funcţiei dacă *f* este convexă pe o vecinătate stânga a lui x_0 şi concavă pe o vecinătate dreapta a lui x_0 sau invers.

Observaţie:Cu ajutorul derivatei a doua se stabilesc intervalele de convexitate şi concavitate şi se determină punctele de inflexiune.

Exemple de itemi de tip examen de bacalaureat

1. Se consideră funcţia $f: R \setminus \{-1\} \to R$, $f(x) = \frac{x^2}{x+1}$.

a) Să se calculeze derivata funcţiei *f*.

b) Să se determine intervalele de monotonie ale funcţiei *f*.

c) Să se demonstreze că $f(x) \le -4$ pentru $\forall x < -1$.

2. Se consideră funcţia $f: R \to R$, $f(x) = e^x - e^{-x}$.

a) Să se calculeze $\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x}$.

b) Să se arate că funcţia *f* este crescătoare pe *R*.

c) Să se calculeze $S = g(0) + g(1) + ... + g(2012)$, unde $g: R \to R$, $g(x) = f'(x) - f''(x)$ şi f'' reprezintă derivata a doua a funcţiei *f*.

3. Se consideră funcţia $f: R \to R$, $f(x) = x + e^{-x}$.

a) Să se calculeze $f'(x), x \in R$.

b) Să se arate că *f* este descrescătoare pe $(-\infty;0]$ şi crescătoare pe $[0;+\infty)$.

c) Să se determine ecuaţia asimptotei oblice către $+\infty$ la graficul funcţiei *f*.

4. Se consideră funcţia $f: R \to R$, $f(x) = x^{2012} - 2012(x-1) - 1$.

a) Să se calculeze $f(0) + f'(0)$.

b) Să scrie ecuaţia tangentei la graficul funcţiei f în punctul de abscisă $x_0 = 1$.

c) Să se arate că *f* este convexă pe *R*.

5. Se consideră funcţia $f: R \to R$, $f(x) = e^x + x^2$.

a) Să se calculeze $\lim_{x \to 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$.

b) Să se demonstreze că funcţia f nu are asimptotă către $+\infty$.

c) Să se demonstreze că funcţia f este convexă pe R.

6. Se consideră funcţia $f: (0;+\infty) \to R$ definită prin $f(x) = x - 2\ln x$.

a) Să se calculeze $f'(x), x \in (0;+\infty)$

b) Să se demonstreze că funcţia f este convexă pe intervalul $(0;+\infty)$.

c) Să se demonstreze că $f(x) \ge \ln \frac{e^2}{4}$, $\forall x \in (0;+\infty)$